



Quelques contributions au calcul des variations et aux équations elliptiques

Gisella Croce

► To cite this version:

Gisella Croce. Quelques contributions au calcul des variations et aux équations elliptiques. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université du Havre, 2015. tel-01238234

HAL Id: tel-01238234

<https://hal.science/tel-01238234>

Submitted on 4 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



QUELQUES CONTRIBUTIONS AU CALCUL DES VARIATIONS ET AUX ÉQUATIONS ELLIPTIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
diplôme d'habilitation à diriger des recherches
en Mathématiques par

Gisella Croce

Date de la soutenance : 1er décembre 2015

Rapporteurs

M. Pierre Cardaliaguet	Professeur à l'Université Paris-Dauphine
M. Thierry Gallouët	Professeur à Aix-Marseille Université
M. Wilfrid Gangbo	Professeur à Georgia Institute of Technology

Composition du jury

M. Pierre Cardaliaguet	Professeur à l'Université Paris-Dauphine
M. Bernard Dacorogna	Professeur à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne
M.me Patrizia Donato	Professeur à l'Université de Rouen
M. Thierry Gallouët	Professeur à Aix-Marseille Université
M. Antoine Henrot	Professeur à l'Université de Lorraine
M. Rabah Labbas	Professeur à l'Université du Havre

Table des matières

1	Résumé	3
2	Équations implicites	5
2.1	Introduction	5
2.2	Notions de convexité généralisée	6
2.3	Une généralisation d'un théorème d'existence et quelques applications	8
2.4	Sélection de solutions	13
3	Problèmes isopérimétriques	18
3.1	Introduction	18
3.2	Sur une valeur propre nonlinéaire	19
3.3	Inégalité isopérimétrique quantitative	22
3.4	Symétrie et asymétrie des minimiseurs d'une fonctionnelle non coercitive	26
4	Équations elliptiques	29
4.1	Introduction	29
4.2	Deux ouvrages	31
4.3	Équations elliptiques à coercitivité dégénérée	31
4.4	Effets régularisants de termes d'ordre inférieur polynômiaux	33
4.5	Effets régularisants de termes d'ordre inférieur singuliers	37

Remerciements

Au moment de terminer ce manuscrit, je pense à tous mes collaborateurs, une grande partie du mérite de ces travaux leur revient. En particulier Antoine Henrot m'a fait partager son enthousiasme pour l'optimisation de formes, avec beaucoup de gentillesse et disponibilité. Discuter, le plus souvent via Skype, avec mon ami Giovanni Pisante est toujours un plaisir. Je remercie Lucio Boccardo, pour le cappuccino qu'il m'offre à Rome, avant de faire des mathématiques, avec un sourire.

Pierre Cardaliaguet, Thierry Gallouët et Wilfrid Gangbo m'ont fait l'honneur de rapporter sur ce mémoire. Je tiens à leur exprimer ma gratitude, ainsi qu'à Patrizia Donato, Antoine Henrot et Rabah Labbas pour avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie Bernard Dacorogna, qui m'a initié à la recherche, pour m'avoir dit qu'il était fier d'y participer.

La bonne ambiance dans mes lieux de travail est très agréable, j'en suis grée à mes collègues et amis. Je remercie en particulier David Manceau pour sa disponibilité constante et Rabah Labbas pour ses conseils précieux et sa collaboration dans la vulgarisation scientifique.

Mes amis Ana, Chiara, Michelone, Oana, Pascal, Véronique, Camille, Xavier, Chloé, Pascal, Jean-Francois, Lucas, Sarah, Catherine et Anna ont contribué implicitement ou explicitement à ce travail.

Je remercie mes parents pour leur soutien constant. Je suis une personne heureuse grâce à ma famille : merci à Charlotte pour ses invitations à jouer à cache-cache et merci à Farrellone pour ses encouragements, sa patience et sa compréhension.

En ces jours mes pensées vont aux victimes des attentats de Paris du 13 novembre. J'espère qu'elles continuent de s'amuser, quelque part.

Chapitre 1

Résumé

Ce manuscrit contient le résumé de mon activité de recherche après ma thèse de doctorat. J'ai choisi de présenter des travaux qui ont une unité thématique et ceux que j'estime plus significatifs. Il est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre porte sur des problèmes de Dirichlet relatifs aux *équations implicites*, qui s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} F_i(Du) = 0, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , et les applications $F_i : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ et $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont données. Ces équations complètement nonlinéaires ont reçu beaucoup d'attention dans la littérature. Le cas scalaire, où $N = 1$, a été traité, selon les problèmes, avec différentes approches, comme la théorie des solutions de viscosité, la construction pyramidale et le théorème des catégories de Baire (voir [118], [61], [62], [63], [93], [50], [87], [82] par exemple). Si l'existence de solutions est une question complètement résolue, la sélection d'une solution est ouverte. En effet ce type de problèmes admet une infinité de solutions. Par conséquent une question intéressante est d'en sélectionner et caractériser une. Nous décrirons des résultats de sélection de solutions pour un système d'équations eikoniales.

Le cas vectoriel, où $N > 1$, a été traité dans la littérature à l'aide de deux théories différentes : la théorie des catégories de Baire, déjà citée, et la théorie de l'intégration convexe de Gromov (voir [123] par exemple). Dans les deux théories on utilise la notion d'enveloppe rang un convexe, une notion généralisée d'analyse convexe. Nous décrirons un résultat d'existence qui généralise ceux déjà présents dans la littérature avec la méthode des catégories de Baire, et traiterons quelques applications.

Le sujet du deuxième chapitre est l'étude de quelques problèmes isopérimétriques. Le premier problème concerne une valeur propre nonlinéaire, définie à travers une condition non locale de moyenne nulle sur des fonctions à valeur constante sur le bord. Nous caractériserons l'ensemble qui minimise la valeur propre parmi tous les ensembles de volume donné, en obtenant deux boules égales. L'ensemble minimiseur est ainsi le même que celui trouvé par Krahn dans [115] pour la deuxième valeur propre du laplacien avec conditions de Dirichlet au bord.

Nous traiterons ensuite l'inégalité isopérimétrique quantitative. Cette inégalité, dont il existe au moins trois preuves différentes (voir [95] pour un survol), peut être vue comme une version "améliorée" de l'inégalité isopérimétrique classique. Elle affirme que le déficit isopérimétrique (qui mesure la différence entre le périmètre d'un ensemble et celui de la boule de même aire) peut être estimé avec une constante qui dépend de la dimension, multipliée par le carré de l'asymétrie de Fraenkel (qui mesure la différence symétrique entre un ensemble et une boule, de même aire). Nous montrerons l'existence d'un ensemble qui minimise le ratio entre le déficit isopérimétrique et le carré de l'asymétrie de Fraenkel dans le plan, en donnant ainsi une nouvelle preuve de l'inégalité isopérimétrique quantitative en \mathbb{R}^2 .

Le troisième problème porte sur la symétrie des minimiseurs d'une fonctionnelle non coercitive, avec une contrainte de moyenne nulle. Nous montrerons que les minimiseurs sont à symétrie sphérique, comme les fonctions propres relatives à la deuxième valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet au bord. Par ailleurs, dans un disque, elles sont antisymétriques pour certaines valeurs de l'un des paramètres qui définissent le problème et non antisymétriques pour d'autres. Ceci montre une rupture de symétrie, déjà observée dans des problèmes coercitifs, comme dans [80], [75], [110], [14], [56], [124], pour des problèmes en dimension 1 et dans [100] pour des problèmes en dimension supérieure.

Le troisième chapitre porte sur des problèmes elliptiques. Nous y décrirons deux ouvrages, conçus comme un cours de niveau master ou doctorat, dont le but principal est l'étude des solutions au sens des distributions de problèmes elliptiques nonlinéaires sous forme de divergence. La forme la plus simple de tels problèmes est

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u, Du)) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où a est une application elliptique, c'est-à-dire $a(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$, $\alpha > 0$. Ces problèmes sont appelés de Leray-Lions, depuis le papier [117]. Nous décrirons les résultats d'existence, régularité et unicité de solutions en suivant les articles [117], [134], [36], [37], [15], selon la régularité de la source f (f est une fonction dans un espace de Lebesgue ou une mesure).

Nous traiterons aussi un problème de Dirichlet pour une équation elliptique à coercitivité dégénérée :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)Du) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $a : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée telle que $a(x, s) \geq \frac{\alpha}{(1 + |s|)^\gamma}$ pour $\alpha, \gamma > 0$.

Puisque cette hypothèse sur a donne des solutions moins régulières que les solutions de problèmes elliptiques coercitifs (comme montré dans [35]), nous analyserons les effets régularisants de quelques termes d'ordre inférieur, singuliers ou de type polynômial.

Chapitre 2

Équations implicites

Ce chapitre est dédié à la présentation des travaux [12], [13], [64], [78].

2.1 Introduction

Les problèmes étudiés dans ce chapitre s'écrivent sous la forme

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} F_i(Du) = 0, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n , et les applications $F_i : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ et $\varphi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont données. Puisqu'en général on ne peut pas s'attendre à des solutions C^1 , on cherchera des solutions $W^{1,\infty}(\Omega)$. On remarquera qu'à cause de la condition de Dirichlet au bord, les problèmes quasilinéaires sont exclus. Pour cette raison, les systèmes d'équations (2.1.1) ont été appelés "implicites" dans l'ouvrage [82] de Dacorogna et Marcellini. Nous allons distinguer le cas scalaire, où $N = 1$, du cas vectoriel, où $N > 1$.

Dans le cadre scalaire, un exemple d'équation implicite est l'équation eikonale :

$$\begin{cases} |Du| = 1, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui est un exemple classique aussi dans la théorie des solutions de viscosité (voir l'ouvrage de P.-L. Lions [118] par exemple), ou le système d'équations eikonales

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| = 1, & i = 1, \dots, N, \text{ p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui provient depuis plusieurs modèles nonlinéaires en mécanique et science des matériaux. Dans le cas scalaire, la question de l'existence de solutions du problème (2.1.1) a été complètement résolue, par la construction pyramidale de Cellina (voir [61], [62], [63] et [93]) ou par la méthode des catégories de Baire (voir [50], [87] et [82]). En général, en écrivant (2.1.1) sous forme d'inclusion différentielle

$$\begin{cases} Du \in E, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où E , supposé compact, est l'intersection des zéros des fonctions F_i , il existe une solution sous l'hypothèse que $D\varphi \in E \cup \text{int co } E$, où $\text{co } E$ est l'enveloppe convexe de E . Les deux résultats cités ci-dessus établissent qu'en effet, si une solution existe, il en existe une infinité. Cela peut se voir très facilement si l'on pense à la simple équation eikonale en dimension 1, avec conditions nulles au bord, par exemple. Il est facile de voir qu'aussi le système d'équations eikonales (2.1.2) admet une infinité de solutions. Supposons par simplicité que $\varphi = 0$. Si $Q \subset \mathbb{R}^N$ est un hyperrectangle tel que la normale extérieure à chaque face est contenue dans $\{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : |x_1| = \dots = |x_N|\}$, alors la fonction distance en norme l^1 du bord de Q , résout le système (2.1.2) dans Q . Dans un

domaine quelconque Ω , le théorème de Vitali nous permet de recouvrir Ω , à moins d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, par une union dénombrable de domaines Q_i comme ci-dessus. La fonction définie par $d_1(\cdot, \partial Q_i)$ en $Q_i, i \in \mathbb{N}$, et zero ailleurs, est une solution $W^{1,\infty}(\Omega)$ du système (2.1.2). Puisqu'il existe une infinité de recouvrements de Vitali de Ω , le problème (2.1.2) admet une infinité de solutions $W^{1,\infty}(\Omega)$. La construction décrite ci-dessus pour le système (2.1.2) est un cas particulier de la construction pyramidale. Par conséquent une question intéressante est la sélection d'une solution, qui a été affrontée dans les papiers [64] et [78], en collaboration avec Champion et Pisante respectivement.

Dans le cas vectoriel, des exemples typiques sont les deux suivants : le problème des valeurs singulières

$$\begin{cases} \lambda_i(Du) = a_i, & i = 1, \dots, N, \text{ p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\lambda_1(A) \leq \lambda_2(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ sont les valeurs singulières d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice $(AA^t)^{\frac{1}{2}}$, et le problème plus général des puits de potentiel, motivé par des modèles en cristallographie (voir [9] et [10]) :

$$\begin{cases} Du \in \cup_i^{n_0} SO(n)A_i, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dans le cas vectoriel, la question de l'existence de solutions est plus délicate que dans le cas scalaire. Ce problème a été étudié à travers la méthode des catégories de Baire dans l'article [82] de Dacorogna et Marcellini (voir aussi l'article [85] de Dacorogna et Pisante) et par la méthode de l'intégration convexe de Gromov dans les papiers [123] et [122] de Müller et Šverák. Dans les deux théories, une notion d'enveloppe convexe généralisée de l'ensemble E , l'enveloppe rang un convexe, joue un rôle central et remplace l'enveloppe convexe du cadre scalaire. En fait, en gros, deux sont les conditions suffisantes pour qu'il existe une solution du système (2.1.1) :

1. $D\varphi$ appartenant à l'intérieur de l'enveloppe rang un convexe de E ;
2. l'enveloppe rang un convexe est stable par rapport à des petites modifications de E ("propriété d'approximation" dans [82] ou "approximation par l'intérieur" dans [123]).

Les enveloppes des deux théories sont différentes : la méthode des catégories de Baire utilise une enveloppe en général plus petite que l'enveloppe utilisée dans la théorie de l'intégration convexe de Gromov. Nous avons montré dans [13] que l'on peut utiliser l'enveloppe la plus grande, même dans la méthode des catégories de Baire. Par ailleurs notre résultat permet aussi de travailler avec des sous-ensembles de l'enveloppe rang un convexe. Ceci nous a permis de traiter plusieurs applications, pour lesquelles l'entière enveloppe rang un convexe n'est pas connue.

2.2 Notions de convexité généralisée

Dans ce paragraphe nous allons rappeler deux notions de convexité généralisée : la rang un convexité et la polyconvexité.

Notations 2.2.1. Pour $\xi \in \mathbb{R}^{N \times n}$ on pose

$$T(\xi) = (\xi, \text{adj}_2 \xi, \dots, \text{adj}_{N \wedge n} \xi) \in \mathbb{R}^{\tau(N,n)},$$

où $\text{adj}_s \xi$ est la matrice des sous-déterminants $s \times s$ de ξ , $1 \leq s \leq N \wedge n = \min\{N, n\}$ et où

$$\tau = \tau(N, n) = \sum_{s=1}^{N \wedge n} \binom{N}{s} \binom{n}{s} \text{ et } \binom{N}{s} = \frac{N!}{s!(N-s)!}.$$

Si $N = n = 2$, alors $T(\xi) = (\xi, \det \xi)$.

Définition 2.2.2. Soit $f : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction.

1. f est polyconvexe s'il existe une fonction convexe $g : \mathbb{R}^{\tau(N,n)} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $f(\xi) = g(T(\xi))$.

2. f est rang un convexe si $f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda)f(\eta)$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N \times n}$ avec $\text{rang}(\xi - \eta) = 1$.

Si une fonction f est polyconvexe alors elle est rang un convexe, mais ces deux notions ne sont pas équivalentes (voir [1] pour un exemple).

Définition 2.2.3. Soit $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ un ensemble. Alors

1. E est polyconvexe s'il existe un convexe $K \subset \mathbb{R}^{\tau(N,n)}$ tel que $\{\xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : T(\xi) \in K\}$ est égal à E .
2. E est rang un convexe si pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et pour tout $\xi, \eta \in E$ tel que $\text{rang}(\xi - \eta) = 1$, $\lambda\xi + (1-\lambda)\eta$ appartient à E .

Comme pour les fonctions, si un ensemble est polyconvexe, alors il est rang un convexe.

Définition 2.2.4. Les enveloppes polyconvexe et rang un convexe d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ sont respectivement le plus petit ensemble polyconvexe et rang un convexe qui contient E . Elles sont dénotés par $\text{Pco } E$ et $\text{Rco } E$.

Évidemment on a la chaîne d'inclusions

$$E \subseteq \text{Rco } E \subseteq \text{Pco } E \subseteq \text{co } E.$$

Des formules récursives existent pour représenter ces enveloppes :

$$(2.2.1) \quad \text{Pco } E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : T(\xi) = \sum_{i=1}^{\tau+1} t_i T(\xi_i), \xi_i \in E, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\tau+1} t_i = 1 \right\}$$

et

$$(2.2.2) \quad \text{Rco } E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{R}_i \text{co } E,$$

où $\text{R}_0 \text{co } E = E$ et

$$\text{R}_{i+1} \text{co } E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : \xi = \lambda A + (1-\lambda)B, \lambda \in [0, 1], A, B \in \text{R}_i \text{co } E, \text{rang}(A - B) \leq 1 \right\}, i \geq 0.$$

On peut aussi écrire les enveloppes à l'aide des fonctions polyconvexes et rang un convexes :

$$\begin{aligned} \text{Pco } E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction polyconvexe } f \in \mathcal{F}_\infty^E \right\}, \\ \text{Rco } E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction rang un convexe } f \in \mathcal{F}_\infty^E \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{F}_\infty^E = \left\{ f : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : f|_E \leq 0 \right\}.$$

Les propriétés topologiques d'un ensemble ne se transmettent pas, en général à son enveloppe, comme résumé dans l'article [86] de Dacorogna et Ribeiro. En effet $\text{Pco } E$ et $\text{Rco } E$ sont ouverts si E est ouvert ; $\text{Pco } E$ est compact si E est compact et dans ce cas nous avons que

$$(2.2.3) \quad \text{Pco } E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction polyconvexe } f \in \mathcal{F}^E \right\}$$

où

$$\mathcal{F}^E = \left\{ f : \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R} : f|_E \leq 0 \right\}.$$

En général ce n'est pas vrai que $\text{Rco } E$ est compact si E est compact (voir Kolář [114]) et on n'a pas l'analogie de la formule (2.2.3). Pour cette raison, dans le papier [13] en collaboration avec Barroso et Ribeiro, nous avons considéré des enveloppes différentes.

Définition 2.2.5. Pour un ensemble E de $\mathbb{R}^{N \times n}$, on pose

$$\begin{aligned} \text{Pco}_f E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction polyconvexe } f \in \mathcal{F}^E \right\} \\ \text{Rco}_f E &= \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{N \times n} : f(\xi) \leq 0, \text{ pour toute fonction rang un convexe } f \in \mathcal{F}^E \right\}. \end{aligned}$$

Ces enveloppes contiennent respectivement $\text{Pco } E$ et $\text{Rco } E$ et sont fermées. Elles sont respectivement, polyconvexe et rang un convexe. Pour des ensembles compacts E , elles sont les enveloppes considérées dans la théorie de l'intégration convexe. Pour des ensembles E ouverts, Müller et Šverák ont utilisé une autre définition :

$$\text{Rco}^{MS} E = \bigcup_{\substack{C \subset E \\ C \text{ cpt}}} \text{Rco}^{MS} C.$$

En général, à moins de considérer un ensemble compact, les inclusions $\text{Pco } E \subsetneq \overline{\text{Pco } E} \subsetneq \text{Pco}_f E$ sont strictes. Les inclusions $\text{Rco } E \subsetneq \overline{\text{Rco } E} \subsetneq \text{Rco}_f E$ sont strictes même si E est compact, en général.

2.3 Une généralisation d'un théorème d'existence et quelques applications

Nous allons brièvement rappeler la méthode des catégories de Baire et la méthode de l'intégration convexe, les deux théories établies pour les équations implicites, afin de pouvoir ensuite expliquer notre généralisation.

La méthode des catégories de Baire, développée dans [82], est basée sur la propriété de relaxation.

Définition 2.3.1. [Dacorogna-Marcellini] Soient E et K deux ensembles de $\mathbb{R}^{N \times n}$. On dit que K a la propriété de relaxation par rapport à E si, pour chaque ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et pour chaque fonction affine u_ξ , telle que $Du_\xi(x) = \xi$, $Du_\xi(x) \in K$ et il existe une suite $u_\nu \in \text{Aff}_{pw}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ telle que

1. $u_\nu \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$;
2. $Du_\nu(x) \in E \cup K$, p.p. en Ω ;
3. $u_\nu \xrightarrow{*} u_\xi$ in $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$;
4. $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \text{dist}(Du_\nu(x); E) dx = 0$.

Comme montré dans [82], la propriété de relaxation joue un rôle central pour l'existence de solutions de problèmes de Dirichlet pour inclusions différentielles :

Théorème 2.3.2. [Dacorogna-Marcellini] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ et $K \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ un compact et un borné, respectivement. Supposons que K ait la propriété de relaxation par rapport à E . Soit $\varphi \in \text{Aff}_{pw}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ telle que

$$D\varphi(x) \in E \cup K \text{ p.p. en } \Omega.$$

Alors il existe un ensemble dense d'applications $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ telles que $Du(x) \in E$ pour presque tout $x \in \Omega$. Si K est ouvert, φ peut être prise $C_{pw}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$.

Étant difficile de vérifier la propriété de relaxation dans les applications, des conditions suffisantes ont été obtenues dans [82].

Définition 2.3.3. [Dacorogna-Marcellini] Soit $E \subset K \subset \mathbb{R}^{N \times n}$. Les ensembles E et K ont la propriété d'approximation s'il existe une famille d'ensembles fermés E_δ et K_δ , $\delta > 0$, tels que

1. $E_\delta \subset K_\delta \subset \text{int } K$ pour tout $\delta > 0$;
2. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\text{dist}(\eta; E) \leq \varepsilon$ pour tout $\eta \in E_\delta$, $\delta \in (0, \delta_0]$;
3. si $\eta \in \text{int } K$ alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\eta \in K_\delta$ pour tout $\delta \in (0, \delta_0]$.

Théorème 2.3.4. [Dacorogna-Marcellini] Soit $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ compact et supposons que $\text{Rco } E$ ait la propriété d'approximation avec $K_\delta = \text{Rco } E_\delta$. Alors $\text{int } \text{Rco } E$ a la propriété de relaxation par rapport à E .

Ce résultat nous donne alors une condition suffisante pour l'existence de solutions de (2.1.1) :

$$(2.3.1) \quad D\varphi(x) \in E \cup \text{int Rco } E, \text{ p.p. en } \Omega.$$

Dans la théorie développée à l'aide de l'intégration convexe de Gromov [104], le théorème d'existence établi dans [123] demande des conditions sur E similaires, mais utilise la notion d'enveloppe $\text{Rco}^{MS} E$. Comme dans la propriété d'approximation, la stabilité de l'enveloppe $\text{Rco}^{MS} E$ est requise :

Définition 2.3.5. [Müller-Šverák] Soit E un ensemble compact contenu dans $\mathbb{R}^{N \times n}$. Une suite d'ouverts $\{U_i\}$ est une approximation par l'intérieur de E si

1. $U_i \subseteq \text{Rco}^{MS} U_{i+1}$;
2. $\sup_{X \in U_i} \text{dist}(X, E) \rightarrow 0$ si $i \rightarrow +\infty$.

Le théorème d'existence établi dans [123] est le suivant :

Théorème 2.3.6. [Müller-Šverák] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit E un compact qui admet une approximation par l'intérieur par des ensembles ouverts U_i . Soit $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application C^1 telle que $D\varphi \in U_1$ dans Ω . Alors il existe une application $u \in \varphi + W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ telle que $Du \in E$ p.p. en Ω .

Comme on verra dans la suite, il y a des applications intéressantes pour lesquelles l'intérieur de $\text{Rco } E$ est vide, et donc la condition (2.3.1) est trop restrictive. Notre but dans [13] a été d'obtenir des conditions suffisantes pour la propriété de relaxation, plus flexibles que l'hypothèse (2.3.1). Plus précisément nous avons montré le

Théorème 2.3.7. [Barroso-Croce-Ribeiro] Soit $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ borné et tel que E et $\text{Rco}_f E$ ont la propriété d'approximation avec $K_\delta = \text{Rco}_f E_\delta$ pour des ensembles compacts $E_\delta \subset \mathbb{R}^{N \times n}$. Alors $\text{int Rco}_f E$ a la propriété de relaxation par rapport à E .

De ce théorème et de la méthode des catégories de Baire on déduit que, pour l'existence de solutions de (2.1.1), la condition (2.3.1) peut être remplacée par

$$(2.3.2) \quad D\varphi(x) \in E \cup \text{int Rco}_f E, \text{ p.p. en } \Omega.$$

À remarquer que dans les applications, il nous semble plus naturel d'approcher l'ensemble compact E avec des ensembles fermés (les E_δ), plutôt que des ouverts, comme requis par l'approximation par l'intérieur. Nous avons aussi montré un résultat qui permet de travailler avec des sous-ensembles de $\text{Rco}_f E$. Ceci est utile dans les applications, où souvent, l'entier $\text{Rco}_f E$ n'est pas connu. Pour énoncer notre résultat nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 2.3.8. [Barroso-Croce-Ribeiro] Soit U un ensemble de $\mathbb{R}^{N \times n}$ et, pour un entier $I \geq 1$, soient $\xi_i \in \mathbb{R}^{N \times n}$ et $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, I$ tels que $\sum_{i=1}^I \lambda_i = 1$. Alors $(\lambda_i, \xi_i)_{1 \leq i \leq I}$ vérifient $(H_I(U))$ si

- (i) dans le cas $I = 1$, $\xi_1 \in U$;
- (ii) dans le cas $I = 2$, $\xi_1, \xi_2 \in U$ et $\text{rang}(\xi_1 - \xi_2) = 1$;
- (iii) dans le cas $I > 2$, à moins d'une permutation, $\xi_1, \xi_2 \in U$, $\text{rang}(\xi_1 - \xi_2) = 1$ et en posant

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, & \eta_1 = \frac{\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \mu_i = \lambda_{i+1}, & \eta_i = \xi_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq I-1 \end{cases}$$

alors $(\mu_i, \eta_i)_{1 \leq i \leq I-1}$ vérifient $(H_{I-1}(U))$.

Cette propriété a été introduite dans [79] ; ici nous demandons en plus que les vertexes de la "chaîne" soient des éléments d'un ensemble donné. Par ailleurs tous les ξ_i appartiennent à U .

Théorème 2.3.9. [Barroso-Croce-Ribeiro] Soient E, K deux ensembles bornés de $\mathbb{R}^{N \times n}$. Supposons que pour $\delta > 0$, E_δ, K_δ vérifient :

1. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\text{dist}(\eta; E) \leq \varepsilon$ pour tout $\eta \in E_\delta$, $\delta \in (0, \delta_0]$;
2. si $\eta \in \text{int } K$ alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\eta \in K_\delta$ pour tout $\delta \in (0, \delta_0]$;
3. pour tout $\delta > 0$ et pour tout $\xi \in K_\delta$ il existe $I \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_i, \xi_i)_{1 \leq i \leq I}$ avec $\lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^I \lambda_i = 1$ et $\xi_i \in \mathbb{R}^{N \times n}$, vérifiant $(H_I(\text{int } K))$ et $\xi = \sum_{i=1}^I \lambda_i \xi_i$, $\sum_{\substack{i=1 \\ \xi_i \notin E_\delta}}^I \lambda_i < \delta$.

Alors $\text{int } K$ a la propriété de relaxation par rapport à E .

Nous allons maintenant présenter quelques applications de nos résultats. Dans [113], Kirchheim a montré l'existence d'une application non-affine avec un nombre fini de valeurs du gradient mais sans connexions de rang un entre elles :

Théorème 2.3.10. [Kirchheim] Soient $N, n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné. Alors il existe $E = \{\xi_1, \dots, \xi_m\} \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ tel que

$$\text{rang}(\xi_i - \xi_j) = \min\{N, n\}, \text{ si } i \neq j$$

et il existe $\xi \notin E$ et $u \in u_\xi + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ tels que $Du(x) \in E$, p.p. en Ω , où u_ξ est l'application telle que $Du_\xi = \xi$.

Les éléments de l'ensemble E du Théorème 2.3.10 n'ont pas de connexion rang un, et donc le gradient de la donnée au bord ξ n'appartient pas à $\text{Rco } E = E$. Par conséquent on ne peut pas utiliser la propriété d'approximation 2.3.3. Cependant, l'ensemble E est tel que le gradient de u_ξ appartient à l'intérieur de $\text{Rco}_f E$. Notre résultat peut s'appliquer pour obtenir l'existence d'une solution, comme montré dans [133] par Ribeiro.

Nos résultats permettent aussi de traiter des inclusions différentielles définies par des ensembles E isotropes. On rappelle qu'un ensemble E est isotrope si $RES \subseteq E$ pour toute R, S dans le groupe orthogonal. Il peut être décrit à travers les valeurs singulières $0 \leq \lambda_1(\xi) \leq \dots \leq \lambda_n(\xi)$, définies comme les valeurs propres de la matrice $\sqrt{\xi \xi^t}$. Le problème suivant a été traité dans [71] et [12], en collaboration avec Barroso et Ribeiro, mais il peut être aussi traité avec nos résultats précédents :

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} Du(x) \in E, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 et E est un compact de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ isotrope. La méthode des catégories de Baire (voir [71]) et la méthode de l'intégration convexe (voir [12]) ont pu donner le

Théorème 2.3.11. [Barroso-Croce-Ribeiro] Soit $E := \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in \Lambda_E\}$, où $\Lambda_E \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq y\}$ est compact. Soit

$$K = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : f_\theta(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) < \max_{(a,b) \in \Lambda_E} f_\theta(a, b), \forall \theta \in [0, \max_{(a,b) \in \Lambda_E} b] \right\},$$

où $f_\theta(x, y) := xy + \theta(y - x)$. Alors, si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné et si $\varphi \in C_{pw}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ est tel que $D\varphi \in E \cup K$ p.p. en Ω , alors il existe une application $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ telle que $Du \in E$ p.p. en Ω .

Pour ce problème, $K = \text{int } \text{Rco } E = \text{int } \text{Rco}_f E$. Pour montrer cela, deux résultats de Cardaliaguet et Tahraoui établis dans [59] ont été utilisés. D'une part, les auteurs ont caractérisé l'enveloppe polyconvexe de l'ensemble E ; grâce à ce résultat dans [71] nous avons montré que

$$\text{Pco } E = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : f_\theta(\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \leq \max_{(a,b) \in \Lambda_E} f_\theta(a, b), \forall \theta \in [0, \max_{(a,b) \in \Lambda_E} b] \right\}.$$

D'autre part, Cardaliaguet et Tahraoui ont montré, en dimension 2, que les ensembles compacts isotropes rang un convexes sont aussi polyconvexes (voir aussi le papier [69] de Conti, De Lellis, Müller et Romeo). Puisque l'enveloppe $\text{Rco}_f E$ d'un ensemble isotrope compact E est compacte et isotrope et puisqu'elle est rang un convexe, on a l'égalité $\text{Rco}_f E = \text{Pco } E$ et donc une caractérisation de $\text{Rco}_f E$. Dans [71], où on utilise la méthode des catégories de Baire, l'enveloppe utilisée est $\text{Rco } E$.

Au contraire de $\text{Rco}_f E$, une caractérisation de $\text{Rco} E$ ne se déduit pas immédiatement de [59], car en général, $\text{Rco} E$ peut ne pas être compact. Pour cette raison, dans [71], $\text{Rco} E$ a été calculé (et la conclusion est qu'il coïncide avec $\text{Rco}_f E$).

Une application originale de notre résultat d'existence est la suivante :

$$(2.3.4) \quad \begin{cases} Du(x) \in E, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$E = \{ \xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : (\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_n(\xi)) \in \Lambda_E, \det \xi > 0 \},$$

avec $\Lambda_E \subseteq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 \leq \dots \leq x_n\}$.

Pour $n = 2$, Cardaliaguet et Tahraoui ont défini dans [60] l'ensemble $R(\Lambda_E)$ pour tout ensemble compact $\Lambda_E \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2\}$ comme le plus petit ensemble compact de $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2\}$ qui contient Λ_E tel que $\{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in R(\Lambda_E), \det \xi \geq 0\}$ est rang un convexe.

Théorème 2.3.12. [Cardaliaguet-Tahraoui] Soit Λ un sous-ensemble compact de $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2\}$ tel que $R(\Lambda)$ est connexe. Alors

$$R(\Lambda) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2, x_1 \geq \alpha, \sigma_3(x_1) \leq x_2 \leq \inf\{\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_1)\}\}$$

$$\text{où } \alpha = \inf_{(x_1, x_2) \in \Lambda} x_1,$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1) &= \inf_{(\theta, \gamma) \in \Sigma_1} f_{\theta, \gamma}^1(x_1), & f_{\theta, \gamma}^1(x_1) &= \begin{cases} \theta + \frac{\gamma - \theta^2}{\theta - x_1}, & x_1 < \theta, \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases} \\ \sigma_2(x_1) &= \inf_{(\theta, \gamma) \in \Sigma_2} f_{\theta, \gamma}^2(x_1), & f_{\theta, \gamma}^2(x_1) &= \theta + \frac{\gamma - \theta^2}{\theta + x_1}, \\ \sigma_3(x_1) &= \sup_{(\theta, \gamma) \in \Sigma_3} f_{\theta, \gamma}^3(x_1), & f_{\theta, \gamma}^3(x_1) &= \begin{cases} -\theta + \frac{\gamma - \theta^2}{x_1 - \theta}, & x_1 > \theta, \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Sigma_0 = \{(\theta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 : \theta \geq 0, \gamma \geq \theta^2\},$$

$$\Sigma_1 = \{(\theta, \gamma) \in \Sigma_0 : x_2 \leq f_{\theta, \gamma}^1(x_1), \forall (x_1, x_2) \in \Lambda\},$$

$$\Sigma_2 = \{(\theta, \gamma) \in \Sigma_0 : x_2 \leq f_{\theta, \gamma}^2(x_1), \forall (x_1, x_2) \in \Lambda\},$$

$$\Sigma_3 = \{(\theta, \gamma) \in \Sigma_0 : x_2 \geq f_{\theta, \gamma}^3(x_1), \forall (x_1, x_2) \in \Lambda\}.$$

De plus il existe une fonction convexe $h : \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in R(\Lambda), \det \xi \geq 0\} = \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : h(\xi, \det \xi) \leq 0, \det \xi \geq 0\}.$$

Ils ont aussi montré la

Proposition 2.3.13. [Cardaliaguet-Tahraoui] Soit Λ un sous-ensemble compact de $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2\}$. Supposons qu'il existe C_1 et C_2 , sous-ensembles compacts de Λ , tels que si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1 \cup C_2 = \Lambda$ et $\sup_{(x_1, x_2) \in C_1} x_2 < \inf_{(x_1, x_2) \in C_2} x_1$, alors ou $C_1 = \emptyset$ ou $C_2 = \emptyset$. Alors $R(\Lambda)$ est connexe.

Une conséquence directe est la représentation de $\text{Rco}_f E$:

Corollaire 2.3.14. [Cardaliaguet et Tahraoui] Soit $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in \Lambda_E, \det \xi \geq 0\}$ où Λ_E est un sous-ensemble compact de $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq x_2\}$ tel que $R(\Lambda_E)$ est connexe. Alors

$$\text{Rco}_f E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in R(\Lambda_E), \det \xi \geq 0\}.$$

Alors on peut établir une formule dans le cas où Λ_E est composé par deux points :

Proposition 2.3.15. [Barroso-Croce-Ribeiro] Soit $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in \Lambda_E, \det \xi > 0\}$, où $\Lambda_E = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$, $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2$; on pose

$$\underline{\theta} = \frac{-a_1 a_2 + b_1 b_2}{b_1 + b_2 - a_1 - a_2}.$$

Alors

$$(2.3.5) \quad \text{Rcof } E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in R(\Lambda_E), \det \xi > 0\}$$

où $R(\Lambda_E)$ est l'ensemble des points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(2.3.6) \quad \begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq b_2, \\ x_2 \geq \frac{a_1 a_2}{x_1}, \\ x_2 \leq \frac{-a_1 a_2 + \underline{\theta}(a_1 + a_2) - \underline{\theta} x_1}{-x_1 + \underline{\theta}}, \quad \text{si } a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ x_2 \leq \frac{b_1 b_2}{x_1}. \end{cases}$$

De plus

$$\text{int Rcof } E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in \text{int rel } R(\Lambda_E), \det \xi > 0\},$$

où $\text{int rel } R(\Lambda_E)$ est l'intérieur relatif de $R(\Lambda_E)$ par rapport à $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 \leq x_2\}$ et est l'ensemble de points $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} a_1 < x_1 \leq x_2 < b_2, \\ x_2 > \frac{a_1 a_2}{x_1}, \\ x_2 < \frac{-a_1 a_2 + \underline{\theta}(a_1 + a_2) - \underline{\theta} x_1}{-x_1 + \underline{\theta}} \\ x_2 < \frac{b_1 b_2}{x_1}. \end{cases}$$

Le dessin suivant donne une représentation de l'ensemble $R(\Lambda_E)$.

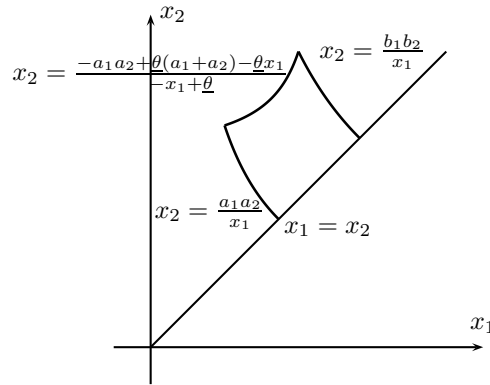


FIGURE 2.1 – L'ensemble $R(\Lambda_E)$

Nous avons montré ce résultat pour le problème (2.3.4) :

Théorème 2.3.16. [Barroso-Croce-Ribeiro] Soit $\Lambda_E = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$ avec $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2$. Soit $E = \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)) \in \Lambda_E, \det \xi > 0\}$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et soit $\varphi \in C_{pw}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ telle que $D\varphi \in E \cup \text{int Rcof } E$ p.p. en Ω . Alors il existe une application $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ telle que $Du(x) \in E$ p.p. en Ω .

Le Théorème 2.3.9 nous a permis de traiter le cas où l'ensemble des valeurs singulières de l'ensemble E contient un segment, en dimension 3 :

Théorème 2.3.17. *[Barroso-Croce-Ribeiro] Soit*

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi), \lambda_3(\xi)) \in \Lambda_E, \det \xi > 0\},$$

où $\Lambda_E \subseteq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$. Supposons que

$$\Gamma := \{(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)) : t \in [0, 1]\} \subseteq \Lambda_E,$$

avec $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$ et ou $a_1 < a_2 < a_3$ ou $b_1 < b_2 < b_3$. Soit

$$K := \{\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : (\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi), \lambda_3(\xi)) \in \Lambda_K, \det \xi > 0\},$$

où

$$\Lambda_K := \bigcup_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \text{rel int } \Gamma} \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \\ 0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 < \alpha_3, x_2 x_3 < \alpha_2 \alpha_3\},$$

et

$$\text{rel int } \Gamma := \{(a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)) : t \in (0, 1)\}.$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert borné et soit $\varphi \in C_{\text{piec}}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ telle que $D\varphi(x) \in E \cup K$ pour presque tout x en Ω . Alors il existe une application $u \in \varphi + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ telle que $Du(x) \in E$ p.p. en Ω .

2.4 Sélection de solutions

Dans les articles [64] et [78] nous avons cherché à sélectionner et caractériser une classe particulière de solutions du système d'équations eikonales

$$(2.4.1) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| = 1, & i = 1, \dots, N, \text{ p.p. en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si $\mathfrak{S}(\Omega)$ dénote l'ensemble des solutions $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ de (2.4.1), une possible stratégie de sélection d'une fonction dans $\mathfrak{S}(\Omega)$ est la théorie des solutions de viscosité, introduite par Crandall et Lions dans [70]. Dans cette approche on profite des propriétés des solutions de viscosité, comme la maximalité, l'unicité et des formules explicites. Pour cela, on écrit (2.4.1) sous la forme

$$(2.4.2) \quad \begin{cases} F(Du) = 0, & \text{p.p. en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est n'importe quelle fonction qui s'annule si et seulement si $|x_i| = 1$ pour tout $i = 1, \dots, N$. Alors on cherche une solution de viscosité du problème (2.4.2). Pour $N = 1$, évidemment $u(x) = d_1(x, \partial\Omega)$, ou son opposée, selon le signe de F , est la seule solution de viscosité. En dimensions supérieures, des restrictions géométriques interviennent. En effet, dans [58] et [128], Cardaliaguet, Dacorogna, Georgy, Gangbo et Pisante respectivement, ont montré qu'il existe une solution de viscosité du problème (2.4.2) si et seulement si Ω est un hyper-rectangle tel que les normales à chaque face appartiennent à

$$E = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N : |\xi_i| = 1 \forall i = 1, \dots, N\}.$$

Dans ce cas, la distance au bord en norme l_1 , $d_1(\cdot, \partial\Omega)$, est la solution de viscosité. Même si le résultat précédent est en quelque sens négatif, il a été utilisé par Dacorogna et Marcellini dans [83] pour sélectionner une solution du système d'équations eikonales (2.4.1) (et d'autres problèmes). Les auteurs ont construit un recouvrement de Vitali de Ω composé par domaines Ω_i qui admettent une solution de viscosité et ont défini la solution de viscosité sur chacun des Ω_i . Le recouvrement

est construit de manière recursive, dans l'idée de prendre, à chaque étape, le plus grand hyperrectangle.

Une autre stratégie pour caractériser une famille de fonctions dans $\mathfrak{S}(\Omega)$ consiste à utiliser une méthode variationnelle, c'est-à-dire, de définir une fonctionnelle sur $\mathfrak{S}(\Omega)$ et de l'optimiser. Les minimiseurs ou maximiseurs seraient des solutions sélectionnées du système (2.4.1). Il y a une difficulté évidente pour appliquer cette méthode, puisque l'ensemble $\mathfrak{S}(\Omega)$ n'est pas convexe. Par exemple les fonctionnelles

$$v \rightarrow \int_{\Omega} |v|^p, \quad p \geq 1,$$

n'ont ni de minimiseur ni de maximiseur sur $\mathfrak{S}(\Omega)$. En fait toute suite minimisante converge à la fonction nulle, qui n'appartient pas à $\mathfrak{S}(\Omega)$, et la limite d'une suite maximisante est la distance de $\partial\Omega$ dans la norme l^1 , ou son opposée, qui ne vérifie pas les équations du système (2.4.1), en général.

Dans l'article de Dacorogna, Glowinski et Pan [81] on trouve un premier essai de sélection à travers une méthode variationnelle. Les auteurs étudient numériquement un problème variationnel sur l'ensemble des solutions positives du système (2.4.1) : ils obtiennent une suite maximisante de

$$(2.4.3) \quad \sup \left\{ \int_{\Omega} u, \quad u \geq 0, \quad u \in \mathfrak{S}(\Omega) \right\}$$

à travers la minimisation numérique de

$$\mathcal{J}(u) := - \int_{\Omega} u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| - 1 \right)^2.$$

Comme nous avons déjà dit, il n'y a aucune solution au problème (2.4.3). Cependant, en suivant l'idée de [81] de sélectionner des "solutions régulières", il semble naturel de minimiser les discontinuités du gradient des solutions.

Considérons alors le sous-ensemble de $\mathfrak{S}(\Omega)$ composé par les fonctions v telles que le gradient distributionnel de $\frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, \dots, N$, n'a pas de partie cantorienne localement, i.e., $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est une fonction $SBV_{loc}(\Omega)$. Si $J_{\frac{\partial v}{\partial x_i}}$ est l'ensemble des sauts de $\frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, \dots, N$, une idée assez naturelle serait de minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{J}_t(v) := \mathcal{H}^t \left(\bigcup_{i=1}^N J_{\frac{\partial v}{\partial x_i}} \right)$$

sur

$$\mathcal{E}(\Omega) = \left\{ v \in \mathfrak{S}(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in SBV_{loc}(\Omega), i = 1, \dots, N \right\},$$

pour quelque $t \geq N - 1$. Ceci n'est pas possible. En fait, soit par exemple $\Omega = (0, 1)^2$. En considérant, pour presque tout $t \in (0, 1/2)$ la fonction $w_t : s \mapsto v(s, t)$, on a, par la formule de la co-aire,

$$\mathcal{H}^1(J_1^v) \geq \int_0^{1/2} \mathcal{H}^0(J_1^v \cap ((0, 1) \times t)) dt \geq \int_0^{1/2} \left\lfloor \frac{1}{2t} \right\rfloor dt = +\infty.$$

Pour $t > 1$, étant donnée $v \in \mathcal{E}(\Omega)$, nous avons $\mathcal{H}^1(J_{v_{x_i}} \cap \omega) < \infty$, pour chaque $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ et pour $i = 1, 2$. Par les propriétés des mesures de Hausdorff, $\mathcal{H}^t(J_{v_{x_i}} \cap \omega) = 0$ pour tout $t > 1$. Par définition de mesure, on a $\mathcal{H}^t(J_{v_{x_i}}) = 0$ pour tout $t > 1$.

Cependant, on peut minimiser la mesure \mathcal{H}^{N-1} des discontinuités du gradient des fonctions C^1 par morceaux dans

$$\mathcal{E}_{pw}(\Omega) := \{v \in \mathfrak{S}(\Omega), v \in C_{pw}^1(\Omega)\},$$

si $\partial\Omega$ est l'union d'une famille finie de polyèdres de dimension $N - 1$, chacun inclu dans un hyper-plan avec normales dans E . Autrement dit, sous cette hypothèse, le problème

$$(2.4.4) \quad \inf \left\{ \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^{N-1}(J_i^v), v \in \mathcal{E}_{pw}(\Omega) \right\}$$

admet une solution. L'hypothèse que $\partial\Omega$ soit composé par un nombre fini de tels polyèdres est importante : en fait, on peut construire un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avec le bord composé par un nombre infini de segments avec normales dans E tel que pour tout $v \in \mathcal{E}(\Omega)$ la mesure \mathcal{H}^1 des discontinuités de $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ est infinie.

En dimension 1, la solution de viscosité et son opposée sont les solutions de (2.4.4). En dimension 2, $d_{l^1}(\cdot, \partial\Omega)$ et son opposé sont les seules solutions du problème (2.4.4), si Ω est un rectangle avec les normales dans E . À remarquer que $d_{l^1}(\cdot, \partial\Omega)$ n'est pas en général une solution de (2.4.4).

Pour un domaine quelconque Ω , dans l'article [64] en collaboration avec Champion, notre idée a été de mesurer les sauts de Du pour $u \in \mathfrak{S}(\Omega)$ à travers un "poids" $h \in C_0(\Omega)$ qui pénalise les sauts de Du à l'intérieur de Ω . Plus précisément, soit Ω_n une suite de sous-ensembles ouverts de Ω avec le bord composé par un nombre fini de segments avec normales dans E et tels que

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n+1/2} \leq d(\Omega_n, \partial\Omega) \leq \frac{1}{n}.$$

On pose $\Omega_0 = \emptyset$. La suite $(\Omega_n)_{n \geq 1}$ est croissante, et pour tout $n \geq 1$ le bord de $\omega_n := \Omega_n \setminus \overline{\Omega_{n-1}}$ est composé par un nombre fini de segments avec normales dans E . Alors pour chaque $n \geq 1$, nous avons considéré le problème

$$(2.4.5) \quad \inf \left\{ \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^{N-1}(J_i^v), v \in \mathcal{E}_{pw}(\omega_n) \right\}.$$

Nous avons déjà vu que δ_n , l'infimum du problème (2.4.5), est fini pour chaque $n \geq 1$. On définit $h \in C_0(\Omega,]0, +\infty[)$ comme

$$h(x) := \begin{cases} 1/[4(\alpha_1 + \alpha_2)] & \text{si } x \in \Omega_1, \\ \frac{1}{d_{l^1}(x, \partial\Omega_n) + d_{l^1}(x, \partial\Omega_{n+1})} \left[\frac{d_{l^1}(x, \partial\Omega_{n+1})}{(n+1)^2(\alpha_n + \alpha_{n+1})} + \frac{d_{l^1}(x, \partial\Omega_n)}{(n+2)^2(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2})} \right] & \text{si } x \in \omega_{n+1}, n \geq 1, \end{cases}$$

où $\alpha_n := \max\{1, \delta_n + \mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega_n)\}$ pour tout $n \geq 1$.

Pour tel h , on a démontré le résultat suivant.

Théorème 2.4.1. *[Champion-Croce] Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N avec bord lipschitz. Alors le problème*

$$(P_h) \quad \inf \left\{ \mathcal{F}_h(v) := \sum_{i=1}^N \int_{J_i^v} h(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x), v \in \mathcal{E}(\Omega) \right\}$$

admet un minimum.

Il est clair que ce critère de sélection dépend de la fonction h et h dépend de la suite Ω_n . Au même temps la fonctionnelle devrait dépendre des propriétés géométriques de Ω . Dans [78], en collaboration avec Pisante, nous avons supposé $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ compatible, dans le sens que Ω est un domaine borné régulier par morceaux tel qu'il existe un nombre fini de points dans $\partial\Omega$ pour lesquels la normale ν est parallèle à $x_2 = \pm x_1$, et un nombre fini de segments parallèles à $x_2 = \pm x_1$. N'importe quel ensemble convexe, ouvert, borné, lipschitz de \mathbb{R}^2 tel que $\partial\Omega$ est composé par un nombre fini de courbes C^1 est compatible. Un polygone est aussi compatible. Notre résultat est le suivant :

Théorème 2.4.2. *[Croce-Pisante] Soit Ω un ensemble compatible de \mathbb{R}^2 . Soit $H : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, croissante telle que*

$$\int_0^1 \frac{H(t)}{t} dt < +\infty.$$

Soit

$$\mathcal{F}(v) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} H(d_1(x, \partial\Omega)) d \left| D \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|.$$

Alors le problème

$$(2.4.6) \quad \inf\{\mathcal{F}(v), v \in \mathcal{E}(\Omega)\}$$

admet une solution.

La difficulté de la preuve est la démonstration de l'existence d'une fonction qui rend finie la fonctionnelle \mathcal{F} . Une fois montré ce point, l'existence d'un minimum peut se montrer facilement par les méthodes directes du calcul des variations, en utilisant la compacité dans BV . Celle-ci est la raison pour laquelle la généralisation de ce résultat en dimensions supérieures n'est pas immédiate.

Nous allons expliquer pourquoi nous avons imposé que H ait une telle croissance dans le Théorème 2.4.2. Soit $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Nous allons définir une fonction "raisonnable" $v \in \mathcal{E}(\Omega)$ et imposer que $\mathcal{F}(v)$ soit fini. Puisque le poids H dans la définition de \mathcal{F} dépend seulement de la distance au bord, on doit mesurer les discontinuités de $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$ près du bord. Soit v défini comme suit (voir figure ci-dessous). Soit R le triangle de vertexes $(-1, 1)$, $(1, 1)$ et $(0, 0)$. Il suffit de définir v dans R . On remplit R avec des carrés de côtés parallèles à $x_2 = \pm x_1$. Soit Ω_0 le carré dont le vertex nord est $(0, 1)$ et dont la diagonale vaut 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, soit Q_n^i le carré de vertex nord $(\frac{2i-1}{2^n}, 1)$ et diagonale $\frac{1}{2^n}$. On pose Q_n^{-i} le symétrique de Q_n^i par rapport à l'axe vertical.

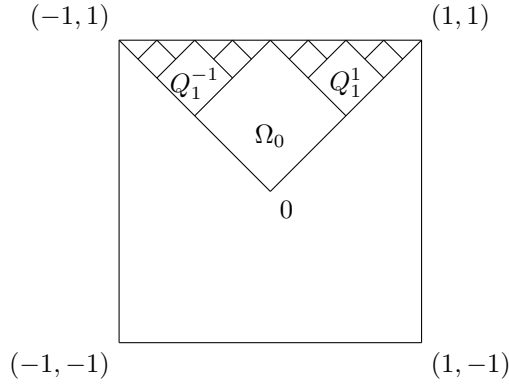


FIGURE 2.2 – L'ensemble Ω et le triangle R

Sur chaque carré v est définie comme la distance en norme l^1 du bord de chaque carré. Alors v appartient à $\mathcal{E}(\Omega)$ et le gradient distributionnel de Dv vit sur les côtés et la diagonale de chaque carré. Soit

$$R_m = \left\{ (x_1, x_2) \in R : \frac{1}{m+1} < x_2 \leq \frac{1}{m} \right\}.$$

Alors $\mathcal{F}(v)$ est fini si

$$\int_{\mathcal{D}_h} H(d_1(x, \gamma)) d\mathcal{H}^1, \quad \int_{\mathcal{D}_v} H(d_1(x, \gamma)) d\mathcal{H}^1, \quad \int_{\mathcal{S}} H(d_1(x, \gamma)) d\mathcal{H}^1$$

sont finis, où \mathcal{S} est l'union des côtés de $Q_n^{\pm i}$, \mathcal{D}_v est l'union des diagonales verticales de $Q_n^{\pm i}$, et \mathcal{D}_h est l'union des diagonales horizontales de $Q_n^{\pm i}$. Il n'est pas compliqué d'estimer ces trois quantités avec $\sum_{m=1}^{\infty} H\left(\frac{1}{m}\right) \frac{1}{m}$, d'où l'hypothèse sur H dans le théorème précédent.

L'une des perspectives dans cette thématique est l'étude de l'ensemble des solutions du problème (2.4.6). En effet, très probablement, la fonctionnelle \mathcal{F} admet plus qu'un minimiseur dans l'ensemble $\mathcal{E}(\Omega)$. En considérant des ensembles Ω avec des propriétés de symétrie, à fixer, nous aimerions pouvoir montrer l'existence de minimiseurs "symétriques", à travers l'étude de conditions d'optimalité qu'un minimiseur doit satisfaire.

Dans le cadre vectoriel aussi une question intéressante est la sélection d'une solution. En fait, la méthode des catégories de Baire donne une famille dense de solutions dans $W^{1,\infty}(\Omega)$. Un travail en cours avec Pisante est l'étude du problème

$$(2.4.7) \quad \begin{cases} Du \in E, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où E est le sous-ensemble suivant du groupe orthogonal de \mathbb{R}^2 :

$$E = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dacorogna, Marcellini et Paolini dans [84] ont exhibé une solution explicite du problème (2.4.7) ayant un comportement fractale près du bord d'un domaine Ω carré (voir aussi [102] pour une approche numérique). Puisque dans le cadre vectoriel il n'y a pas de "construction pyramidale" simple comme pour les problèmes scalaires, cette solution pourrait être vue comme une "solution de base" à utiliser pour avoir une solution explicite dans n'importe quel autre ensemble Ω à travers un recouvrement de Vitali. Évidemment, le comportement fractale donne des irrégularités importantes à l'intérieur de Ω . Ceci est une difficulté, si l'on veut sélectionner les solutions "régulières" comme nous avons fait pour le système (2.4.1).

Chapitre 3

Problèmes isopérimétriques

Ce chapitre est dédié à la présentation des travaux [76, 77], [54], [20].

3.1 Introduction

L'inégalité isopérimétrique classique affirme que parmi tous les ensembles du plan de périmètre fixé, le cercle est celui qui maximise l'aire. Dans la littérature on trouve nombreuses démonstrations de ce résultat. Celle due à Hurwitz [108] utilise l'équivalence entre l'inégalité isopérimétrique et l'inégalité de Wirtinger, c'est-à-dire

$$\|u'\|_2 \geq \alpha \|u\|_2$$

pour toute fonction $u \in W_{\text{pér}}^{1,2}(-1, 1) = \{u \in W^{1,2}(-1, 1) : u(-1) = u(1)\}$ telle que $\int_{-1}^1 u = 0$.

Cette célèbre inégalité et ses généralisations ont reçu beaucoup d'attention dans la littérature. Une généralisation assez naturelle a été étudiée dans [80] par Dacorogna, Gangbo et Subía, qui ont calculé la valeur de

$$\alpha(p, q) = \inf \left\{ \frac{\|u'\|_p}{\|u\|_q} : u \in W_{\text{pér}}^{1,p}(-1, 1) \setminus \{0\}, \int_{-1}^1 |u|^{q-2} u = 0 \right\}$$

pour $p, q > 1$. Dans [76, 77], en collaboration avec Henrot et Pisante, nous avons considéré la même inégalité en dimension N en résolvant un problème d'optimisation de forme y lié. Plus en détails, nous avons cherché l'ensemble qui minimise cette valeur propre parmi tous les ensembles de volume donné. Nous avons montré que le minimiseur est un couple de boules égales.

Si on modifie la définition de $\alpha(p, q)$ en considérant des fonctions à moyenne nulle, à la place de la contrainte $\int_{-1}^1 |u|^{q-2} u = 0$, on trouve un bizarre phénomène de perte de symétrie. En effet dans [124], Nazarov a montré que la fonction propre est impaire si et seulement si $q \leq 3p$, en achevant la solution de ce problème étudié dans [80], [14], [110] (voir aussi [75] pour une généralisation). Une rupture de symétrie a été observée aussi par Girao et Weth dans [100] pour la version N -dimensionnelle de ce problème. Les auteurs ont étudié la minimisation du quotient $\frac{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}$ en $W^{1,2}(\Omega)$, avec $2 \leq q < 2^*$, et ont montré que pour un disque de \mathbb{R}^2 , si q est assez grand, les minimiseurs ne sont pas antisymétriques, alors qu'ils le sont pour q proche à 2. Ces papiers nous ont induit à chercher s'il y avait une perte de symétrie pour les minimiseurs d'une fonctionnelle non coercitive, où l'on considère toujours une condition de moyenne nulle :

$$\lambda^{\theta,p}(\Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|\nabla v|^2}{(1+|v|)^{2\theta}}, v \in W^{1,q}(\Omega), v \neq 0, \int_{\Omega} v = 0, \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}$$

pour θ, p, q qui satisfont les conditions $0 < 2\theta < 1$, $q = \frac{2N(1-\theta)}{N-2\theta}$, $1 < p < q^*$, si $N \geq 3$ et $2(1-\theta) \leq q < 2$, $1 < p < +\infty$, si $N = 2$. Dans [54], en collaboration avec Brock, Guibé et Mercaldo, nous avons montré qu'il y a une perte de symétrie en dimension 2 pour un disque. En

fait les minimiseurs sont antisymétriques pour $p = 2$ et θ assez petit, alors qu'ils ne le sont pas pour p assez grand et tout $\theta < \frac{1}{2}$.

Les inégalités isopérimétriques quantitatives constituent un autre sujet de recherche lié à l'inégalité isopérimétrique. Plus précisément, il s'agit d'inégalités où une certaine distance entre un ensemble E et la boule de même volume est estimée par la différence entre le périmètre de E et le périmètre de la boule. Dans les premiers articles [47] et [94] de Bonnesen et Fuglede sur ce sujet, on utilise diverses distances, dont la distance de Hausdorff. L'asymétrie de Fraenkel, définie par

$$(3.1.1) \quad \lambda(\Omega) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} \left\{ \frac{|\Omega \Delta B_x|}{|\Omega|}, |B_x| = |\Omega| \right\}, \quad B_x = \text{boule centrée en } x,$$

pour un ensemble Ω de \mathbb{R}^N a été utilisée pour la première fois par Hall dans [105], pour une inégalité isopérimétrique quantitative. On y montre que

$$\lambda(E)^4 \leq C(N)[P(E) - P(B)],$$

où $C(N)$ est une constante qui ne dépend que de la dimension N . Dans [96], [66] et [91], Fusco, Maggi, Pratelli, Cicalese, Leonardi et Figalli ont donné une preuve de cette inégalité avec l'exposant optimal de λ , qui est 2, grâce à trois techniques différentes : dans le premier article on utilise des techniques de symétrisation, le deuxième est basé sur la régularité des quasi-minimiseurs du périmètre, établie dans la théorie des surfaces minimales, et dans le troisième on utilise le transport de masse.

Dans le papier [20] en collaboration avec Bianchini et Henrot nous avons montré l'existence d'un ensemble qui minimise la fonctionnelle $E \rightarrow \delta(E)/\lambda^2(E)$, dans le plan, où

$$(3.1.2) \quad \delta(\Omega) = \frac{P(\Omega) - P(B)}{P(B)}, \quad |B| = |\Omega|, \quad B = \text{boule},$$

est le déficit isopérimétrique de Ω . En particulier, la nôtre est donc une nouvelle preuve de l'inégalité isopérimétrique quantitative, en dimension 2. Nous avons aussi montré quelques propriétés d'un ensemble optimal et formulé une conjecture sur sa forme.

3.2 Sur une valeur propre nonlinéaire

Dans [76, 77] nous avons considéré une inégalité isopérimétrique pour la valeur propre non linéaire suivante. Sur un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^N , on pose

$$\lambda^{p,q}(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}, v \neq 0, v \in W_{\text{pér}}^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} |v|^{q-2} v \, dx = 0 \right\},$$

où $W_{\text{pér}}^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$ ayant une valeur constante au bord de Ω . Parmi tous les ensembles Ω de volume donné, nous avons cherché ceux qui minimisent $\lambda^{p,q}(\Omega)$, en étudiant ainsi une inégalité isopérimétrique de type Faber-Krahn.

Nous avons montré que la forme optimale pour $\lambda^{p,q}(\Omega)$ est un couple de boules égales. Ceci rappelle les résultats d'optimisation de forme pour les valeurs propres du laplacien. En effet, un couple de boules égales minimise aussi la deuxième valeur propre du laplacien avec conditions de Dirichlet au bord, comme prouvé par Krahn dans [115] (voir aussi l'article [49] de Brasco et Franzina pour ce même résultat d'optimisation de formes pour le p -laplacien).

Théorème 3.2.1. *[Croce-Henrot-Pisante] Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Alors pour*

$$(3.2.1) \quad 1 < p < \infty \text{ et } \begin{cases} 2 \leq q < p^*, & \text{si } 1 < p < N \\ 2 \leq q < \infty, & \text{si } p \geq N \end{cases}$$

nous avons que

$$\lambda^{p,q}(\Omega) \geq \lambda^{p,q}(B_1 \cup B_2),$$

où B_1 et B_2 sont deux boules disjointes de mesure $|\Omega|/2$.

La valeur propre $\lambda^{2,2}(\Omega)$ a été déjà étudiée dans [101] par Greco et Lucia, avec une technique qui utilise la linéarité du problème. En effet, après s'être réduits à couples de boules, les auteurs ont étudié la solution (explicite) de l'équation différentielle ordinaire satisfaite par la composante radiale des minimiseurs sur chacune des boules. Ils ont aussi montré que si Ω est une boule, la valeur propre $\lambda^{2,2}(\Omega)$ est égale à la deuxième valeur propre du laplacien avec conditions de Dirichlet au bord et la première valeur propre non nulle du laplacien avec conditions de Neumann au bord.

Nous allons esquisser la preuve du Théorème 3.2.1, qui est différente de celle faite pour $\lambda^{2,2}(\Omega)$ dans [101], après la réduction à couples de boules.

1. À travers les méthodes directes du calcul des variations, il n'est pas difficile de montrer l'existence d'un minimiseur borné u de $\lambda^{p,q}(\Omega)$.
2. Soient $\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > c\}$ et $\Omega_- = \{x \in \Omega : u(x) < c\}$, où c est la valeur de u sur $\partial\Omega$. Si B_\pm est une boule de même volume que $|\Omega_\pm|$, alors on a l'inégalité

$$\lambda^{p,q}(\Omega) \geq \lambda^{p,q}(B_+ \cup B_-).$$

Ceci se déduit des propriétés de la symétrisation de Schwarz (voir [112] ou [109] par exemple), en particulier de l'inégalité de Pólya-Szegő (montrée dans [129], et utilisée par Faber et Krahn pour prouver que la première valeur propre du laplacien avec conditions de Dirichlet au bord est minimisée par la boule, parmi tous les ensembles de même volume (voir [106])).

3. Dans l'union de deux boules, l'équation d'Euler satisfaite par un minimiseur est

$$(3.2.2) \quad -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = [\lambda^{p,q}(\Omega)]^p \|u\|_{L^q(\Omega)}^{p-q} |u|^{q-2} u.$$

Pour montrer cela, nous avons adapté l'idée d'une preuve de [80], faite en dimension 1, où on montre que le multiplicateur de Lagrange, qui paraît naturellement dans l'équation d'Euler à cause de la contrainte $\int_{\Omega} |u|^{q-2} u = 0$, est nul.

Le théorème de la divergence appliqué à l'équation (3.2.2) donne

$$(3.2.3) \quad \left| \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} \right|^{p-1} |\partial B_1| = \left| \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} \right|^{p-1} |\partial B_2|.$$

4. La dérivée de forme (voir l'ouvrage de Henrot et Pierre [107] pour la définition et ses applications aux problèmes aux valeurs propres en particulier) de notre valeur propre fournit une simple condition d'optimalité. Si un couple de boules (B_1, B_2) est critique, alors les dérivées normales sur le bord de la fonction propre correspondante $u = u_1 \chi_{B_1} - u_2 \chi_{B_2}$ sont égales, en valeur absolue :

$$(3.2.4) \quad \left| \frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} \right| = \left| \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} \right|.$$

Ce résultat n'est pas évident, car notre valeur propre n'est pas nécessairement simple (et donc dérivable). Nous avons cependant utilisé un résultat sur les valeurs propres multiples montré dans le livre de Henrot [106].

5. Les dérivées normales au bord ne sont pas nulles. En effet, la composante radiale de u_1 vérifie

$$-\left[(p-1)z''(t) + \frac{N-1}{t} z'(t) \right] |z'(t)|^{p-2} = [\lambda_{per}^{p,q}(\Omega)]^p \|u\|_{L^q(\Omega)}^{p-q} |z(t)|^{q-2} z(t).$$

Donc, si $\frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} = 0$, alors $u_1 = 0$ sur le bord. L'identité de Pohozaev appliquée à l'équation (3.2.2) donne une contradiction avec les hypothèses sur p, q, N .

Des équations (3.2.3) et (3.2.4) on déduit que $|\partial B_1| = |\partial B_2|$ et donc les deux boules B_1 et B_2 ont le même rayon.

6. Nous avons alors montré que

$$\lambda^{p,q}(\Omega) \geq \lambda^{p,q}(B_+ \cup B_-) \geq \lambda^{p,q}(B'_1 \cup B'_2)$$

où B'_1 and B'_2 sont deux boules disjointes telle que $|B'_1| = |B'_2| = \frac{|B_+ \cup B_-|}{2}$. La décroissance de notre valeur propre par rapport aux inclusions d'ensembles implique le résultat.

Le Théorème 3.2.1 a un corollaire pour la valeur propre suivante. Elle nous parait plus difficile à cause d'une rupture de symétrie et elle est loin d'avoir été comprise :

$$(3.2.5) \quad \lambda_0^{p,q}(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}, v \neq 0, v \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} |v|^{q-2} v \, dx = 0 \right\}$$

où l'on considère des fonctions nulles au bord. Comme remarqué dans [125] par Nazarov, dans le cas $N > p$, il existe $\hat{q} = \hat{q}(p) < p^*$ tel que pour $q > \hat{q}$, l'ensemble qui minimise $\lambda_0^{p,q}(\Omega)$ n'est pas un couple de boules égales. Cependant, pour $p = q$ nous avons montré l'inégalité isopérimétrique suivante :

Théorème 3.2.2. *[Croce-Henrot-Pisante] Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N . Alors l'inégalité suivante a lieu pour $2 \leq p < \infty$:*

$$\lambda_0^{p,p}(\Omega) \geq \lambda_0^{p,p}(B_1 \cup B_2),$$

où B_1 et B_2 sont des boules disjointes de mesure $|\Omega|/2$.

La preuve n'est pas difficile. Par le Théorème 3.2.1 nous avons

$$\lambda_0^{p,p}(\Omega) \geq \lambda^{p,p}(\Omega) \geq \lambda^{p,p}(B \cup B).$$

Pour tout p, q , une fonction propre $u = u_1(|x - x_1|)\chi_{B_1} + u_2(|x - x_2|)\chi_{B_2}$ correspondante à $\lambda = \lambda^{p,q}(B_1 \cup B_2)$ peut être écrite grâce à la solution w du problème

$$-\left[(p-1)w''(t) + \frac{N-1}{t}w'(t)\right] |w'(t)|^{p-2} = |w(t)|^{q-2}w(t), \quad w(0) = 1, \quad w'(0) = 0.$$

En effet, si $\alpha_i = u(x_i)$, alors

$$u_i = \alpha_i w_{\alpha_i}(c(\alpha_i)|x - x_i|)$$

où $c(\alpha) = \frac{\lambda \|u\|_{L^q}^{1-\frac{q}{p}}}{|\alpha|^{1-\frac{q}{p}}}$, pour $\alpha \neq 0$. Puisque u est constante sur le bord des deux boules, dans le cas $q = p$, nous avons $\alpha_1 w(\lambda R_1) = \alpha_2 w(\lambda R_2)$. Si de plus $R_1 = R_2$, on déduit que $w(\lambda R_1) = 0$, puisque $\alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0$. Par conséquent, une fonction propre de $\lambda^{p,p}(B \cup B)$ vérifie $u = 0$ sur ∂B et donc elle est aussi fonction propre de $\lambda_0^{p,p}(B \cup B)$. Cela donne

$$\lambda^{p,p}(B \cup B) = \lambda_0^{p,p}(B \cup B)$$

et donc la conclusion.

Le problème d'optimisation de forme pour $\lambda_0^{2,2}(\Omega)$ a été déjà étudié dans [92] par Freitas et Henrot. La preuve est basée sur une expression explicite des solutions radiales de l'équation d'Euler et sur des propriétés fines des zéros des fonctions de Bessel. Dans le cas $p = q = 2$, le problème a été appelé *torsadé* dans [11] par Barbosa et Bérard, dans l'étude de propriétés spectrales de la variation seconde d'une immersion d'une variété riemannienne à courbure moyenne constante. La condition de moyenne nulle vient du fait que l'on considère des variations qui préservent le volume.

Une rupture de symétrie a été aussi montrée pour le problème isopérimétrique lié à la valeur propre

$$\lambda_{BV}^q(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\|Du\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}}{\|u\|_{L^q(\Omega)}}, u \in BV_0(\Omega), \int_{\Omega} u = 0 \right\}$$

où $BV_0(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $BV(\Omega)$, nulles à l'extérieur de Ω et $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$. En fait, dans [48], Brandolini, Della Pietra, Nitsch et Trombetti ont étudié le minimum de $\lambda_{BV}^q(\Omega)$ parmi tous les ensembles de volume fixé. Ils ont montré l'existence d'une valeur $q(N) \in]1, \frac{N}{N-1}[$ telle que pour $q < q(N)$, $\lambda_{BV}^q(\Omega)$ est minimisée par un couple de boules égales, alors que pour $q > q(N)$, le minimum est atteint pour un couple de boules ayant rayons différents.

3.3 Inégalité isopérimétrique quantitative

Dans le papier [20] nous avons traité l'inégalité isopérimétrique quantitative dans le plan

$$\lambda(E)^2 \leq C\delta(E).$$

On rappelle que δ est le déficit isopérimétrique, défini dans (3.1.2) et λ est l'asymétrie de Fraenkel, définie par (3.1.1). Plus précisément, nous avons étudié, en vue de cette inégalité, la minimisation de la fonctionnelle

$$\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \frac{\delta(\Omega)}{\lambda^2(\Omega)}$$

sur les ensembles Ω différents d'une boule. Nos résultats peuvent se résumer dans le

Théorème 3.3.1. *[Bianchini-Croce-Henrot] Il existe un ensemble Ω^* qui minimise $\mathcal{F}(\Omega)$ parmi tous les ensembles de \mathbb{R}^2 (la boule exclue). Ω^* vérifie les propriétés suivantes :*

1. *il est composé par au plus 6 composantes connexes ;*
2. *il a au moins deux boules optimales pour l'asymétrie de Fraenkel.*

Nous avons aussi formulé une conjecture sur la forme de l'ensemble optimal pour \mathcal{F} , qui reste une question ouverte. En fait, l'ensemble optimal est connu seulement dans la classe des ensembles convexes, d'après les articles [57] et [3] de Campi et Alvino, Ferone et Nitsch. Les auteurs montrent qu'un stade bien précis réalise

$$(3.3.1) \quad \inf_{\{\Omega \subset \mathbb{R}^2, \text{ convexe} \}} \mathcal{F}(\Omega) = 0.405585.$$

Cependant, dans [66] Cicalese et Leonardi ont montré que l'ensemble optimal Ω_0 est de classe $C^{1,1}$ et son bord est composé par des arcs de cercle. Plus précisément, dans chaque composante connexe de l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{x \in Z(\Omega_0)} (x + \partial B)$ (où $Z(\Omega_0)$ est l'ensemble des centres des boules optimales pour Ω_0), $\partial\Omega_0$ est composé par des arcs de cercle de même rayon. Grâce à ce résultat, si l'on savait montrer que l'ensemble optimal possède deux axes de symétrie, et seulement deux boules optimales pour l'asymétrie de Fraenkel, alors le problème se réduirait à un problème de minimisation en dimension finie. Sa solution est un ensemble non convexe Ω_0 , pour lequel $\mathcal{F}(\Omega) \approx 0.3931$. Notre conjecture, qui coïncide avec celle dans [67] de Cicalese et Leonardi, est que cet ensemble, appelé "masque" dans cet article, est optimal pour \mathcal{F} . Il est représenté dans la figure suivante, où nous avons aussi indiqué les paramètres utilisés pour résoudre le problème d'optimisation mentionné ci-dessus (les deux angles α, θ et le centre $(x_0, 0)$ d'une boule optimale).

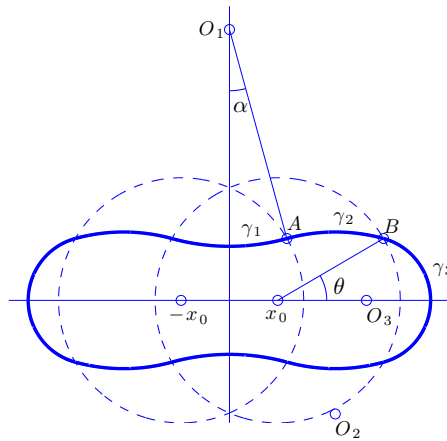


FIGURE 3.1 – Le "masque"

Dans [67], dans le cadre d'une problématique différente, les auteurs ont étudié la fonctionnelle $\mathcal{F}(\Omega)$ étendue par relaxation à la boule B :

$$\widehat{\mathcal{F}}(\Omega) = \begin{cases} \mathcal{F}(\Omega) & \text{if } \Omega \neq B, \\ \inf\{\liminf \mathcal{F}(\Omega_n), \lambda(\Omega_n) > 0, |\Omega_n \Delta B| \rightarrow 0\} & \text{if } \Omega = B. \end{cases}$$

À travers un "principe de sélection itératif" (développé dans [66] et basé sur la régularité des quasi-minimiseurs du périmètre) et la symétrisation de Bonnesen, les auteurs ont étudié les suites convergentes vers la boule, en se réduisant à des suites d'"ovales", c'est-à-dire des ensembles convexes C^1 avec deux axes orthogonaux de symétrie, dont le bord est l'union de deux arcs congruents de cercle. On rappelle que la symétrisation de Bonnesen est définie comme suit. Pour un ensemble E de \mathbb{R}^2 , on fixe une droite l et un point $x \in l$. Pour tout $r > 0$, soit $\lambda(r) = \mathcal{H}^1(\partial B(x, r) \cap E)$. Sur $\partial B(x, r)$ on considère deux arcs opposés, de longueur $\lambda(r)/2$ de manière que l passe à travers le point milieu de chaque arc. L'ensemble obtenu par l'union de tous les arcs quand r varie dans $(0, \infty)$, est appelé le symétrisé annulaire de Bonnesen de E .

Nous allons esquisser la preuve du Théorème 3.3.1, puisqu'elle est complètement différente des autres déjà présentes dans la littérature. Le point le plus difficile pour l'existence d'un ensemble optimal est l'exclusion des suites convergentes vers une boule. Pour cela nous avons utilisé une nouvelle symétrisation d'un ensemble Ω qui en gros consiste à distribuer sur une boule B la moitié de l'aire externe (aire de $\Omega^{OUT} = \Omega \setminus B$) au pôle nord et l'autre moitié au pôle sud, la moitié de l'aire interne (aire de $\Omega^{IN} = B \setminus \Omega$) au pôle est et l'autre moitié au pôle ouest, tout en préservant les longueurs de $\partial\Omega^{IN} \setminus \partial\Omega$ et de $\partial\Omega^{OUT} \setminus \partial\Omega$.

Dans la suite, nous allons supposer que nos ensembles ont aires égale à π , ce qui est permis par l'homogénéité de la fonctionnelle \mathcal{F} .

Définition 3.3.2. [Bianchini-Croce-Henrot] Soit Ω transverse à une boule B , c'est-à-dire que le nombre d'intersections entre le bord de Ω et celui de B est fini. Soient $\Omega^{OUT} = \Omega \setminus B$ et $\Omega^{IN} = B \setminus \Omega$. Soient $\gamma^{IN} = \mathcal{H}^1(\partial\Omega^{IN} \setminus \partial\Omega)$ et $\gamma^{OUT} = \mathcal{H}^1(\partial\Omega^{OUT} \setminus \partial\Omega) = \mathcal{H}^1(\partial\Omega) - \gamma^{IN}$.

Soient A_1, A_2, A_3, A_4 quatre points sur ∂B définis de la manière suivante. La longueur des arcs de cercle σ_{12} et σ_{34} , avec extrémités A_1, A_2 , et A_3, A_4 , respectivement, vaut $\gamma^{OUT}/2$. La longueur des arcs de cercles σ_{23} et σ_{41} , avec extrémités A_2, A_3 , et A_4, A_1 , respectivement, vaut $\gamma^{IN}/2$. On considère un autre arc de cercle, $\tilde{\sigma}_{12}$, d'extrémités A_1, A_2 , en dehors de B , tel que la mesure de l'aire a_{12} entre $\tilde{\sigma}_{12}$ et σ_{12} est égale à $|\Omega^{OUT}|/2$. On définit de manière analogue $\tilde{\sigma}_{34}$. On considère un arc de cercle $\tilde{\sigma}_{23}$ d'extrémités A_2, A_3 , à l'intérieur de B , tel que la mesure de l'aire a_{23} entre $\tilde{\sigma}_{23}$ et σ_{23} est égale à $|\Omega^{IN}|/2$. On définit $\tilde{\sigma}_{41}$ de manière analogue.

Ω^* est l'ensemble dont le bord est l'union des arcs $\tilde{\sigma}_{12}, \tilde{\sigma}_{23}, \tilde{\sigma}_{34}, \tilde{\sigma}_{41}$.

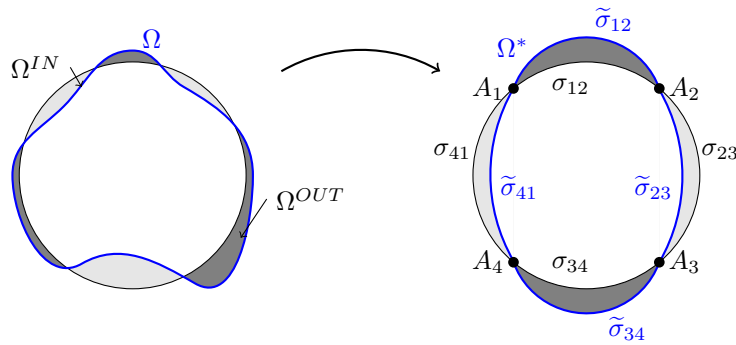


FIGURE 3.2 – L'ensemble Ω^* .

Cette symétrisation se généralise à des ensembles non transverses de manière assez naturelle. Dans ce cas, le bord de Ω^* contiendra quatre arcs congruents de cercle de longueur $(2\pi - \gamma^{IN} - \gamma^{OUT})/4$ chacun. À remarquer que nous utiliserons cette symétrisation pour des ensembles Ω tels que $|\Omega \Delta B|$ sera assez petit, ce qui garantira que cette construction est possible.

Notre symétrisation est différente de celle utilisée dans [67]. En effet le symétrisé annulaire de Bonnesen d'un ensemble Ω intersecte la plus grande boule qui contient Ω . De plus, le bord de notre Ω^* n'est pas C^1 en général, même dans le cas convexe.

Nous pouvons affirmer qu'une suite minimisante ne peut pas converger vers une boule pour les raisons suivantes.

1. Si Ω_ε est une suite d'ensembles telle que $|B\Delta\Omega_\varepsilon| = 4\varepsilon$, alors

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(\Omega_\varepsilon^*) \geq \frac{\pi}{8(4-\pi)} \approx 0.45.$$

En fait, pour l'asymétrie de Fraenkel nous avons $\lambda(\Omega_\varepsilon^*) \leq \frac{4\varepsilon}{\pi}$. Pour le déficit isopérimétrique, selon la figure (a) ci-dessous (le cas (b) est analogue), on voit facilement que

$$\delta(\Omega_\varepsilon) = \frac{\pi}{2} \left[F\left(\eta_1, \frac{\varepsilon}{\sin^2(\eta_1)}\right) + F\left(\eta_2, \frac{\varepsilon}{\sin^2(\eta_2)}\right) \right],$$

où

$$F(x, y) = \sin(x) \frac{h^{-1}(h(x) + y)}{\sin(h^{-1}(h(x) + y))} - x$$

avec

$$h(t) = \frac{g(t)}{\sin^2(t)}, \quad g(t) = t - \sin(t) \cos(t).$$

On remarque que $0 \leq \eta_1 + \eta_2 \leq \pi/2$, $\eta_1 \leq \theta_1 \leq \pi$, $\theta_2 \leq \eta_2 \leq \pi/2$. Les angles $\eta_1, \eta_2, \theta_1, \theta_2$ peuvent avoir plusieurs comportements, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans tous les cas, des simples, mais longs calculs de certains coefficients de la série de Taylor de

$$\frac{1}{\varepsilon^2} F\left(\eta_1, \frac{\varepsilon}{\sin^2(\eta_1)}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon^2} F\left(\eta_2, -\frac{\varepsilon}{\sin^2(\eta_2)}\right)$$

nous ont permis d'estimer par le bas la limite inférieure de $\mathcal{F}(\Omega_\varepsilon^*)$.

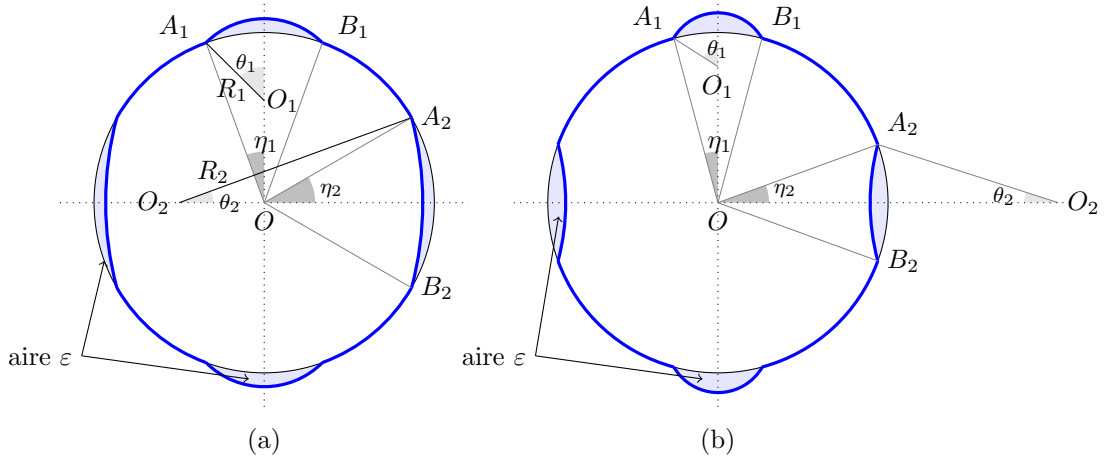


FIGURE 3.3 – La paramétrisation de Ω_ε^* .

2. Notre symétrisation fait décroître \mathcal{F} asymptotiquement : on effet on peut montrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe $\beta > 0$ tel que pour tout Ω transverse à une boule optimale B avec $\lambda(\Omega) \leq \beta$, on a $\mathcal{F}(\Omega^*) \leq \mathcal{F}(\Omega) + \alpha$.

Ceci implique que si Ω_ε est une suite d'ensembles convergents vers une boule tels que $|B\Delta\Omega_\varepsilon| = 4\varepsilon$, alors

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(\Omega_\varepsilon) \geq \frac{\pi}{8(4-\pi)} \approx 0.45.$$

Autrement dit, la limite inférieure de la fonctionnelle \mathcal{F} calculée sur une suite d'ensembles convergents vers une boule est plus grande que le minimum de \mathcal{F} calculé sur la famille des ensembles convexes du plan (voir l'égalité (3.3.1)). Du coup, on peut exclure ces suites.

Une fois cette exclusion montrée, la preuve de l'existence d'un minimum de la fonctionnelle \mathcal{F} est très classique. Le seul point délicat consiste à montrer qu'une suite minimisante Ω_n est contenue dans une boule fixée. Nous l'avons fait, en montrant que Ω_n a au plus 7 composantes connexes. Cet argument peut être readapté pour montrer qu'un ensemble optimal Ω_0 a au plus six composantes connexes.

Nous avons aussi établi qu'un ensemble optimal Ω_0 a au moins deux boules optimales pour l'asymétrie de Fraenkel. En effet, si par contradiction Ω , d'aire π , a seulement une boule optimale B , alors son bord est composé par des arcs de cercles de rayons R_0 dans B et R_1 hors B . Puisque $\partial\Omega$ est de classe C^1 , chaque composante connexe ω de Ω a une symétrie de rotation d'ordre $N \geq 2$. On peut aussi supposer que Ω ne soit pas convexe, par l'égalité (3.3.1).

Dans le cas connexe, on peut utiliser la paramétrisation de la figure ci-dessous, où $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{N} \leq \alpha \leq \pi$. Les rayons des arcs Γ_0 et Γ_1 valent respectivement

$$R_1 = \frac{\sin(\frac{\pi}{N} - \theta)}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{N})}, \quad R_0 = \frac{\sin(\theta)}{\sin(\alpha)}.$$

On peut voir que le déficit isopérimétrique et l'asymétrie de Fraenkel sont donnés par

$$\delta(\Omega) = \frac{2N \left[\alpha \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} + \left(\alpha - \frac{\pi}{N} \right) \frac{\sin(\frac{\pi}{N} - \theta)}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{N})} \right] - 2\pi}{2\pi}, \quad \lambda(\Omega) = \frac{N}{\pi} (\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1),$$

où $N\mathcal{A}_0$ est l'aire de $\Omega \setminus B$ et $N\mathcal{A}_1$ est l'aire de $B \setminus \Omega$, c'est-à-dire

$$\mathcal{A}_0 = R_0^2 g(\alpha) - g(\theta), \quad \mathcal{A}_1 = R_1^2 g\left(\alpha - \frac{\pi}{N}\right) + g\left(\frac{\pi}{N} - \theta\right)$$

où $g(t) = t - \sin(t) \cos(t)$.

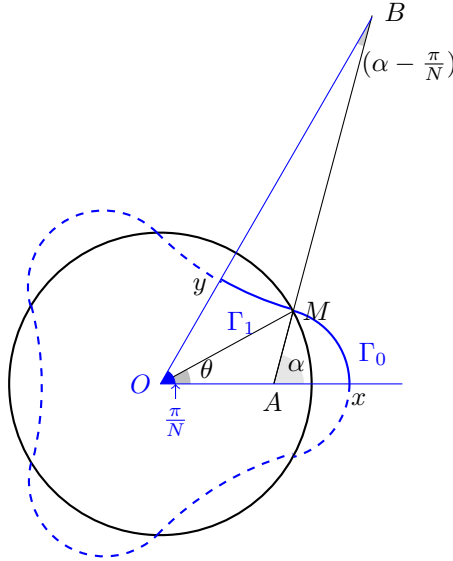


FIGURE 3.4 – Cas connexe ($N = 3$).

Nous avons montré, selon les différentes valeurs de θ, α, N , que Ω ne satisfait pas une condition d'optimalité exprimée dans la proposition suivante.

Proposition 3.3.3. *Soit Ω un ensemble connexe qui minimise \mathcal{F} . Supposons que Ω a une seule boule optimale et que $N \geq 2$ soit l'ordre de symétrie. Alors*

- (i) $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 \leq \frac{\pi}{N}$;
- (ii) $\frac{\delta(\Omega)}{\lambda^2(\Omega)} < 0.4$;

$$(iii) \quad \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} = \frac{8\delta(\Omega)}{\lambda(\Omega)} ;$$

$$(iv) \quad Q \geq 0, \text{ où } Q := \frac{1}{\sin^3(\theta)} H(\alpha) - \frac{1}{\sin^3(\frac{\pi}{N}-\theta)} H(\alpha - \frac{\pi}{N}) - \frac{32N}{\pi} \frac{\delta(\Omega)}{\lambda^2(\Omega)}, \text{ avec } H(x) = \frac{\sin^3(x)}{\tan(x)-x}.$$

La troisième condition correspond à la condition d'optimalité $d(\frac{\delta}{\lambda^2}, V) = \mu d(Aire, V)$, où V est une déformation et μ est un multiplicateur de Lagrange, qui vient du fait que les aires sont fixées. La quatrième condition correspond à une condition d'optimalité de second ordre. La fonction Q est obtenue en faisant la modification suivante de Ω : on remplace α par $\alpha + \varepsilon_0$ en $\Omega \setminus B_1$ et α par $\alpha - \varepsilon_1$ en $B_1 \setminus \Omega$, en gardant la valeur de l'aire.

L'une des perspectives dans cette thématique est l'étude d'une inégalité isopérimétrique quantitative définie à travers une distance d'ensemble différente de l'asymétrie de Fraenkel. Le but serait de pouvoir calculer l'ensemble optimal et par conséquent la constante optimale.

3.4 Symétrie et asymétrie des minimiseurs d'une fonctionnelle non coercitive

La fonctionnelle

$$(3.4.1) \quad v \rightarrow \frac{\|v'\|_{L^p((-1,1))}}{\|v\|_{L^q((-1,1))}}, \quad \int_{-1}^1 v = 0$$

définie sur $W_{\text{pér}}^{1,p}((-1,1))$, pour $p, q > 1$, a attiré de l'attention dans la littérature, à cause de la forme des minimiseurs. En effet, comme montré dans [80] par Dacorogna, Gangbo et Subía, un minimiseur a trois zéros dans l'intervalle $[-1, 1]$: $-1, \alpha, 1$, et deux points critiques : $\beta_1 \in]-1, \alpha[$ et $\beta_2 \in]\alpha, 1[$. Dans la restriction à chacun de ces deux intervalles, il est symétrique par rapport à l'axe $x = \beta_i$, $i = 1, 2$. De plus, il est antisymétrique sur $[-1, 1]$ si et seulement si $q \leq 3p$ (voir l'article de Nazarov [124]).

En dimension supérieure, la question de la forme des minimiseurs est plus difficile. Dans [100], attirés par la rupture de symétrie du problème (3.4.1), Girao et Weth en ont étudié la version N -dimensionnelle dans l'espace $W^{1,2}(B)$, où B est une boule, sous l'hypothèse que $2 \leq q < 2^*$. Leurs résultats principaux peuvent être résumés dans le

Théorème 3.4.1. [Girao-Weth] *Soit u un minimiseur de la fonctionnelle*

$$v \rightarrow \frac{\|\nabla v\|_{L^2(B)}}{\|v\|_{L^q(B)}}, \quad \int_{\Omega} v = 0, \quad v \in W^{1,2}(B).$$

Alors

1. u est à symétrie sphérique par rapport à un point P dans la sphère \mathcal{S}^{N-1} ;
2. si q est proche à 2, alors u est antisymétrique par rapport à l'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot P = 0\}$;
3. si $N = 2$, u n'est pas antisymétrique pour q suffisamment grand.

On rappelle (voir [100], [137], [109] par exemple) qu'une fonction $u : B \rightarrow \mathbb{R}$ est à symétrie sphérique par rapport à $P \in \mathcal{S}^{N-1}$ si, pour tout $r > 0$ et $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x : |x| = r, u(x) \geq c\}$ est égale à $\{x : |x| = r\}$ ou une boule géodésique sur la sphère $\{x : |x| = r\}$ centrée sur rP . En particulier u a une symétrie axiale par rapport à l'axe $\mathbb{R}P$ et est décroissante par rapport à l'angle polaire $\theta = \arccos(\frac{x \cdot e}{|x|} \cdot P)$. Un exemple de fonction à symétrie sphérique est donné par chaque fonction propre relative à la deuxième valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet au bord dans une boule de \mathbb{R}^2 . Il est connu que ces fonctions sont un multiple de l'une des fonctions $\phi_e(x) = \frac{x \cdot e}{|x|} J_1(j_1|x|)$ où e est un vecteur unité de \mathbb{R}^2 , J_1 est la fonction de Bessel d'ordre 1 et j_1 est son premier zéro.

Dans [54] nous avons étudié la valeur propre

$$(3.4.2) \quad \lambda^{\theta,p}(\Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|\nabla v|^2 - F(|x|, v)}{(1 + |v|)^{2\theta}} dx, \quad v \in W^{1,q}(\Omega), \quad v \neq 0, \quad \int_{\Omega} v = 0, \quad \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1 \right\}$$

et montré quelques propriétés de symétrie des minimiseurs. Nous avons supposé que Ω est une boule ou un anneau centré en l'origine de \mathbb{R}^N , $N \geq 2$, θ, p et q satisfont les conditions $0 < 2\theta < 1$ et $1 < p < q^*$, où $q = \frac{2N(1-\theta)}{N-2\theta}$ si $N \geq 3$, et $2(1-\theta) \leq q < 2$ si $N = 2$. De plus, $F : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable en $r = |x| \in [0, +\infty)$ et C^1 en $t \in \mathbb{R}$, qui satisfait $F(r, 0) = 0$ et les conditions de croissance $|F(r, t)| \leq c(1 + |t|)^p$, $c > 0$, $|F_t(r, t)| \leq C_1(1 + |t|)^{p-1}$, $C_1 > 0$, pour tout $r \in [0, +\infty)$, $t \in \mathbb{R}$. Si $p \in (1, 2)$, on suppose de plus que $t(1 + |t|)F_t(r, t) - 2\theta|t|F(r, t) \leq 0$, pour tout $r \in [0, +\infty)$, $t \in \mathbb{R}$. Puisque notre fonctionnelle n'est pas homogène, pour éviter la solution banale nulle, nous avons travaillé dans la boule unité de $L^p(\Omega)$.

Une autre motivation du choix de cette fonctionnelle a été sa coercitivité dégénérée. En fait, même si elle est bien définie sur $H^1(\Omega)$, elle n'est pas coercitive sur cet espace. Dans la littérature plusieurs articles ([42], [5], [119], [90], [131], [31]) sont dédiés à la minimisation de

$$v \rightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{|\nabla v|^2}{(1 + |v|)^{2\theta}} - G(x, v) \right] dx$$

sous différentes hypothèses sur G . Dans tous ces papiers, les auteurs étudient les conséquences de la coercitivité dégénérée sur l'existence et la régularité des minimiseurs (on verra aussi dans le chapitre 4 des problèmes elliptiques à coercitivité dégénérée).

Comme dans [100], nous avons montré que les minimiseurs de notre fonctionnelle sont à symétrie sphérique :

Théorème 3.4.2. *[Brock-Croce-Guibé-Mercaldo] Soit $N \geq 2$. Tout minimiseur de la fonctionnelle définie dans (3.4.2) est à symétrie sphérique par rapport à un point $P \in \mathcal{S}^{N-1}$.*

Pour cela nous avons utilisé le rearrangement par deux points que nous allons rappeler. Soit Ω un anneau, une boule, ou l'extérieur d'une boule en \mathbb{R}^N . Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, nous allons l'étendre sur \mathbb{R}^N en la posant égale à 0 en dehors de Ω .

Définition 3.4.3. *Soit \mathcal{H}_0 la famille des demi-espaces ouverts H en \mathbb{R}^N tels que $0 \in \partial H$. Pour chaque $H \in \mathcal{H}_0$, soit σ_H la réflexion par rapport à ∂H . On pose*

$$\sigma_H u(x) := u(\sigma_H x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Le rearrangement par deux points par rapport à H est donné par

$$u_H(x) := \begin{cases} \max\{u(x); u(\sigma_H x)\} & \text{si } x \in H, \\ \min\{u(x); u(\sigma_H x)\} & \text{si } x \notin H. \end{cases}$$

Cette notion a été introduite comme une transformation d'ensembles dans [138] par Wolontis, et appliquée à des problèmes variationnels pour la première fois dans [55] par Brock et Solynin. Le rearrangement satisfait les propriétés suivantes (nous avons montré la dernière dans le papier [54], en généralisant ainsi un résultat connu pour des fonctions continues depuis l'article [137] de Weth) :

Proposition 3.4.4. *Soit $H \in \mathcal{H}_0$. Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable.*

1. *$u = u_H$ si et seulement si $u(x) \geq u(\sigma_H x)$ pour tout $x \in H$. De la même manière, $\sigma_H u = u_H$ si et seulement si $u(x) \leq u(\sigma_H x)$ pour tout $x \in H$.*
2. *Si $A \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$ et $A(|x|, u) \in L^1(\Omega)$, alors $A(|x|, u_H) \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_{\Omega} A(|x|, u) dx = \int_{\Omega} A(|x|, u_H) dx.$$

3. *Si $B \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour un certain $p \in [1, +\infty)$, alors*

$$\int_{\Omega} B(u) |\nabla u|^p dx = \int_{\Omega} B(u_H) |\nabla u_H|^p dx.$$

4. *u est à symétrie sphérique par rapport à $P \in \mathcal{S}^{N-1}$ si et seulement si $u = u_H$ pour tout $H \in \mathcal{H}_0$ avec $P \in H$.*

5. Soit $u \in L^p(\Omega)$ pour un certain $p \in [1, +\infty)$. Si pour chaque $H \in \mathcal{H}_0$ on a $u = u_H$, ou $\sigma_H u = u_H$, alors u est à symétrie sphérique par rapport à un point $P \in \mathcal{S}^{N-1}$.

Notre technique pour montrer le Théorème 3.4.2 est la suivante (nous esquissons seulement le cas $p \geq 2$). Grâce aux propriétés du rearrangement par deux points, si u est un minimiseur, alors u_H l'est aussi. Les fonctions $w = \Psi(u)$ et $w_H = \Psi(u_H)$, où

$$\Psi(\xi) := \int_0^\xi (1 + |t|)^{-\theta} dt = \frac{\operatorname{sgn} \xi}{1 - \theta} [(1 + |\xi|)^{1-\theta} - 1]$$

satisfont une équation semi-linéaire, dont les solutions sont $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Ceci implique que l'équation satisfaite par $h = w_H - w$ est

$$-\Delta h = L(x)h, \quad \text{en } \Omega \cap H$$

pour une certaine fonction L bornée. Puisque $h \geq 0$ dans $\Omega \cap H$, par le principe du maximum, $w = w_H$, c'est-à-dire, $u = u_H$. Par la Proposition 3.4.4 u est à symétrie sphérique.

Nous avons ensuite étudié les propriétés de antisymétrie des minimiseurs dans le cas d'un disque et dans le cas où $F \equiv 0$. En effet, une conséquence du Théorème 3.4.2 est que les minimiseurs $u = u_\theta$ ont une symétrie axiale. Par invariance par rotations, en \mathbb{R}^2 , nous pouvons supposer que

$$(3.4.3) \quad u_\theta(x_1, x_2) = u_\theta(-x_1, x_2).$$

Comme dans [100], nous avons montré que les minimiseurs ne sont pas antisymétriques dans une boule de \mathbb{R}^2 pour p suffisamment grand. Plus précisément, on dénote par $W_{as}^{1,q}(B)$ le sous-ensemble des fonctions $W^{1,q}(B)$ antisymétriques :

$$W_{as}^{1,q}(B) = \{v \in W^{1,q}(B) : u(x_1, -x_2) = -u(x_1, x_2)\}.$$

Soient

$$\lambda_p^\theta(B) = \inf \left\{ \mathcal{G}(v), v \in W^{1,q}(B), v \neq 0, \int_B v = 0, \|v\|_{L^p(B)} = 1 \right\}$$

et

$$\lambda_p'^\theta(B) = \inf \left\{ \mathcal{G}(v), v \in W_{as}^{1,q}(B), v \neq 0, \int_B v = 0, \|v\|_{L^p(B)} = 1 \right\},$$

où

$$\mathcal{G}(v) = \int_B \frac{|\nabla v|^2}{(1 + |v|)^{2\theta}} dx, \quad v \in W^{1,q}(B), v \neq 0, \int_B v = 0, \|v\|_{L^p(B)} = 1.$$

Nous avons montré le

Théorème 3.4.5. [Brock-Croce-Guibé-Mercaldo] Pour p suffisamment grand, $\lambda_p^\theta(B) < \lambda_p'^\theta(B)$ pour tout $\theta \in [0, 1/2[$. Donc les minimiseurs de \mathcal{G} ne sont pas antisymétriques pour p suffisamment grand.

Par contre, comme dans [100], nous avons montré que pour $p = 2$, toujours en dimension 2, pour θ suffisamment petit, les minimiseurs sont antisymétriques :

Théorème 3.4.6. [Brock-Croce-Guibé-Mercaldo] Soit u_θ un minimiseur pour $\lambda_2^\theta(B)$. Pour θ suffisamment proche à 0, on a $u_\theta(x_1, -x_2) = -u_\theta(x_1, x_2)$ dans B .

Chapitre 4

Équations elliptiques

Ce chapitre est dédié à la présentation des travaux [28], [29], [72], [32], [33], [30].

4.1 Introduction

Les problèmes de Leray-Lions occupent une place fondamentale dans l'étude des équations elliptiques non linéaires. La formulation la plus simple est

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u, Du)) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une application elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ telle que $a(x, s, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2$ pour tout $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Les résultats de Leray et J.-L. Lions [117] et Stampacchia [134] donnent respectivement l'existence et la régularité de solutions au sens des distributions dans le cadre variationnel, c'est-à-dire dans le cas où f appartient à $H^{-1}(\Omega)$. Ces travaux peuvent être considérés l'origine d'un entier sujet de recherche mathématique.

Dans l'ouvrage [28] et dans le livre, plus ample, [29], en collaboration avec Boccardo, nous avons essayé de créer un cours d'introduction aux équations elliptiques sous forme de divergence de niveau du master 2 ou de doctorat. Ce cours peut être divisé en deux parties. La première partie est dédiée aux "résultats classiques" d'analyse non linéaire : théorèmes de point fixe, existence de solutions de problèmes semi-linéaires, existence et régularité de solutions du problème de Leray-Lions. Dans la deuxième partie, nous avons essayé de décrire quelques directions de recherche "moins classiques". Par exemple, nous avons étudié l'existence et l'unicité de solutions dans le cas non variationnel (non en dualité), c'est-à-dire le cas où la source est une fonction $f \in L^m(\Omega)$, avec $1 \leq m < \frac{2N}{N+2}$, ou une mesure de Radon finie (voir les articles [36], [37], [15] de Boccardo, Gallouët, Bénilan, Gariepy, Pierre, Vázquez), en introduisant les solutions d'entropie. Ceci est un concept en général plus faible que la notion de solution au sens des distributions. Nous avons aussi présenté un problème avec un terme d'ordre inférieur à croissance quadratique dans le gradient, étudié dans [19] par Bensoussan, Boccardo et Murat. Le dernier chapitre porte sur un problème où nous avons affaibli l'hypothèse principale, c'est-à-dire l'ellipticité. Plus précisément, on étudie le problème à coercivité dégénérée

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)Du) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $a : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée telle que

$$(4.1.3) \quad a(x, s) \geq \frac{\alpha}{(1 + |s|)^\gamma}$$

pour $\alpha, \gamma > 0$. Pour ce problème, la question de l'existence et de la régularité de solutions est assez délicate. Si $\gamma < 1$, il existe une solution, comme montré dans [35] par Boccardo, Dall'Aglio

et Orsina, mais elle est, en général, moins régulière que la solution d'un problème elliptique avec la même source. Si $\gamma > 1$, des phénomènes de non-existence de solutions peuvent apparaître, même pour des sources constantes.

Comme observé pour des équations elliptiques linéaires et non linéaires (voir [53], [52], [39] par Brezis, Browder, Strauss, Boccardo, Gallouët et Vázquez), il est alors assez naturel d'ajouter des termes d'ordres inférieur, pour voir leur possible effet régularisant. Dans [27] Boccardo et Brezis ont ajouté le terme linéaire u au problème (4.1.2), c'est-à-dire qu'ils ont étudié

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce papier nous a motivé à considérer le terme $|u|^{p-1}u$ dans [72], c'est-à-dire que nous avons étudié

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + |u|^{p-1}u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons prouvé l'existence de solutions distributionnelles dans des espaces de Sobolev avec exposant plus grand que 1 et de solutions entropiques, en fonction des valeurs de $\gamma, p > 0$ et m (on suppose que la source f appartienne à un espace de Lebesgue $L^m(\Omega)$). Par ailleurs, les effets régularisants d'un terme ayant une asymptote verticale observés dans [24] par Boccardo, nous ont motivés à considérer le même terme pour le problème (4.1.2), c'est-à-dire un terme d'ordre inférieur de la forme $h(u)$, où h est une fonction continue, croissante, nulle en 0, ayant une asymptote verticale au point $\sigma > 0$. Nous avons donc considéré le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + h(u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans [32], en collaboration avec Boccardo et Orsina, nous avons analysé un cas limite du problème précédent, où $p = 1$ et $f \in L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)$, en montrant l'existence d'une solution dans l'espace non-reflexif $W_0^{1,1}(\Omega)$, et la non-existence de solutions, dans le cas où f est une mesure de Radon concentrée sur un ensemble de capacité harmonique nulle et $\gamma > 1$. Dans [33] nous avons présenté une preuve plus simple pour la version linéaire par rapport au gradient de ce problème, pour $\gamma = 2$.

Un autre terme qui a beaucoup été étudié pour des problèmes elliptiques a été un terme quadratique dans le gradient (voir les articles [19], [37], [40], [41], [26] de Bensoussan, Boccardo, Murat, Gallouët, Puel par exemple). Autrement dit, dans la littérature on a étudié le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + g(u)|\nabla u|^2 = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

sous différentes hypothèses g . Même un g singulier a été considéré, de la forme $g(u) = \frac{1}{|u|^\theta}$ (voir les articles [4], [6], [8], [26], [45], [97], [7] de Arcoya, Barile, Martínez-Aparicio, Carmona, Leonori, Orsina, Petitta, Boccardo, Porzio, Giachetti, Murat). Pour le problème (4.1.2) le fort effet régularisant d'un terme dont le modèle est $|\nabla u|^2$ a été étudié dans [24], [46], [103], [136] par Boccardo, Segura de León, Trombetti, Grenon. Dans [73], nous avons analysé la présence du terme $\frac{|\nabla u|^2}{|u|^\theta}$, où $\theta > 0$ pour le problème (4.1.2). Plus précisément, pour $\theta < 2$, nous avons montré un effet régularisant ; par contre, nous avons prouvé un résultat de non-existence de solutions $H_0^1(\Omega)$ dans le cas où $\theta \geq 2$.

Dans [74] nous avons considéré un terme singulier de différente nature. Inspiré par le papier [43] de Boccardo et Orsina, où les auteurs ont considéré le même second membre, pour des problèmes semi-linéaires elliptiques dont le modèle est $-\Delta u = \frac{f}{u^p}$, nous avons étudié

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{a(x)\nabla u}{(1+|u|)^\gamma}\right) = \frac{f}{|u|^p} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où f est une fonction dans $L^m(\Omega)$ positive. Malgré la singularité du second membre, nous avons montré un effet régularisant.

4.2 Deux ouvrages

Le but principal de l'ouvrage [28], en collaboration avec Boccardo, est la présentation des résultats d'existence, régularité et unicité des solutions du problème (4.1.1). La première partie traite le cas où f appartient à $H^{-1}(\Omega)$ comme fait dans [117] et [134] par Leray, Lions et Stampacchia. Plus en détail, après avoir montré un théorème de surjectivité pour opérateurs définis sur des espaces de Banach réflexifs en dualité, dû à Brezis ([51]), nous présentons les théorèmes sur l'existence d'une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au sens des distributions, telle que

1. $u \in L^\infty(\Omega)$, si $f \in L^m(\Omega)$, $m > \frac{N}{2}$;
2. il existe un $\lambda > 0$ tel que $e^{\lambda|u|} \in L^{2^*}(\Omega)$, si $f \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$;
3. $u \in L^{m^{**}}(\Omega)$, si $f \in L^m(\Omega)$, $\frac{2N}{N+2} \leq m < \frac{N}{2}$.

On traite aussi le cas où f appartient à un espace de Marcinkiewicz $M^m(\Omega)$. Ces résultats sont précédés par un chapitre sur les théorèmes de point fixe, un chapitre d'analyse réelle et un chapitre sur les équations semilinéaires.

La deuxième partie porte sur le cas où la source est une fonction $f \in L^m(\Omega)$, avec $1 \leq m < \frac{2N}{N+2}$, ou une mesure de Radon finie, comme étudié dans [36, 37] par Boccardo et Gallouët. On montre que

1. si $f \in L^m(\Omega)$, $m > 1$, alors il existe une solution $u \in W_0^{1,m^*}(\Omega)$;
2. si $f \in L^1(\Omega)$ ou f est une mesure de Radon finie, alors il existe une solution $u \in M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$, telle que $|\nabla u| \in M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$.

L'unicité des solutions est aussi étudiée, grâce à la notion de solution d'entropie, introduite dans [15] par Bénéilan, Boccardo, Gallouët, Gariepy, Pierre et Vázquez pour des sources peu régulières. Une fonction u mesurable et finie presque partout est une solution d'entropie si $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $k > 0$ et vérifie l'inégalité suivante :

$$(4.2.1) \quad \int_{\Omega} a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \varphi) \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi) \quad \forall k > 0 \text{ et } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

On rappelle que $T_k(s) = \max\{-k, \min\{s, k\}\}$.

Deux chapitres sont dédiés au cas linéaire, où $a(x, s, \xi) = M(x)\xi$, pour une matrice $M(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symétrique, elliptique, dont les éléments sont des fonctions bornées. On étudie la régularité $H^2(\Omega)$ des solutions, en présentant les résultats de régularité de Nirenberg [126] et on traite la théorie spectrale de l'opérateur $L(v) = -\operatorname{div}(M(x)Dv)$ en montrant des résultats classiques, comme les représentations variationnelles des valeurs propres et la bornitude des fonctions propres. Notre ouvrage contient aussi un chapitre sur le calcul des variations (et ses liens avec les équations aux dérivées partielles) et un chapitre sur l'existence et la régularité des solutions d'un problème elliptique avec un terme d'ordre inférieur à croissance quadratique dans le gradient (comme étudié dans [19] par Bensoussan, Boccardo et Murat).

Le livre [29] est une extension de [28]. On y consacre deux chapitres en plus. L'un porte sur un problème où l'hypothèse d'ellipticité est à croissance polynomiale, i.e.

$$a(x, s, \xi) \cdot \xi \geq b(|s|)|\xi|^2$$

pour une fonction b continue telle que $b(|s|) \geq b_0|s|^r$ pour $|s|$ suffisamment grand et $b(|s|) \geq \alpha$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. L'autre chapitre est dédié au problème à coercivité dégénérée (4.1.2). Les résultats présentés dans notre livre sur ce problème seront décrits dans les paragraphes qui suivent.

4.3 Équations elliptiques à coercitivité dégénérée

Comme déjà expliqué dans l'introduction, la caractéristique du problème (4.1.2) est l'ellipticité dégénérée de la partie principale. En effet, on rappelle qu'on suppose que $a : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit une fonction de Carathéodory telle que pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$a(x, s) \geq \frac{\alpha}{(1 + |s|)^\gamma}$$

et

$$(4.3.1) \quad |a(x, s)| \leq \beta$$

pour des constantes α, β, γ positives. L'hypothèse (4.1.3) implique que l'opérateur

$$(4.3.2) \quad A(v) = -\operatorname{div}(a(x, v)\nabla v), \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

est bien défini sur $H_0^1(\Omega)$ mais pas coercitif sur cet espace (voir l'article de Porretta [130] pour un exemple). Ceci implique que la théorie classique des opérateurs en dualité ne s'applique pas. Cependant en littérature on trouve plusieurs articles sur l'existence de solutions du problème (4.1.2) dans le cas où f appartient à $L^m(\Omega)$ ou est une mesure (pour des données sous d'autres formes voir par exemple [16], [98], [18], [89] de Benkirane, Youssfi, Giachetti, Porzio, Meskine, di Blasio, Feo). Dans les articles [35], [2], [25], [27], [68], [135] de Boccardo, Dall'Aglio, Orsina, Alvino, Ferone, Trombetti, Cirmi, Trombetti, on trouve l'étude de l'existence de solutions du problème (4.1.2), en fonction de l'intégrabilité de la donnée f . Nous allons décrire maintenant ces résultats pour $N \geq 3$ et $\gamma < 1$. Soient

$$(4.3.3) \quad r = \frac{Nm(1-\gamma)}{N-2m}$$

et

$$(4.3.4) \quad q = \frac{Nm(1-\gamma)}{N-m(1+\gamma)}.$$

1. Si $m > \frac{N}{2}$, alors il existe une solution au sens des distributions dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
2. Si $\frac{2N}{N(1-\gamma)+2(\gamma+1)} \leq m < \frac{N}{2}$, alors il existe une solution au sens des distributions dans $H_0^1(\Omega) \cap L^r(\Omega)$.
3. Si $\frac{N}{N+1-\gamma(N-1)} < m \leq \frac{2N}{N(1-\gamma)+2(\gamma+1)}$, alors il existe une solution au sens des distributions dans $W_0^{1,q}(\Omega)$.
4. Si $f \in L^m(\Omega)$, avec $1 \leq m \leq \max \left\{ \frac{N}{N+1-\gamma(N-1)}, 1 \right\}$ le problème (4.1.2) admet une solution u d'entropie telle que $u \in M^r(\Omega)$ et $|\nabla u| \in M^q(\Omega)$, dans le sens suivant : $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $k > 0$ et

$$\int_{\Omega} a(x, u) \nabla u \cdot \nabla T_k(u - \varphi) + \int_{\Omega} |u|^{p-1} u T_k(u - \varphi) \leq \int_{\Omega} f T_k(u - \varphi)$$

pour tout $k > 0$ et pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Dans [21] et [22] Blanchard, Désir et Guibé étudient le cas où $f \in L^1(\Omega)$ en montrant l'existence d'une solution "rénormalisée", pour le cas d'un opérateur plus général. Voir aussi [99] de Giachetti et Porzio pour des résultats dans le cas où on fait des hypothèses de régularité sur f .

Dans [30] nous avons analysé deux cas limite et avons montré les résultats suivants :

Théorème 4.3.1. [Boccardo-Croce] Soit f une fonction dans $L^m(\Omega)$. Soit

$$(4.3.5) \quad m = \frac{N}{N+1-\gamma(N-1)}, \quad \frac{1}{N-1} < \gamma < 1.$$

Alors il existe une solution du problème (4.1.2) dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ au sens des distributions.

On remarquera que $m > 1$ si et seulement si $\gamma > \frac{1}{N-1}$. Dans le cas où $\gamma = \frac{1}{N-1}$ nous avons montré encore l'existence d'une solution dans $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Théorème 4.3.2. [Boccardo-Croce] Soit f une fonction dans $L^m(\Omega)$. Supposons que $f \log(1 + |f|) \in L^1(\Omega)$ et $\gamma = \frac{1}{N-1}$. Alors le problème (4.1.2) admet une solution dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ au sens des distributions.

Le cas limite $\gamma = 1$ a été étudié dans [25], où Boccardo a montré l'existence d'une solution $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ pour tout $p < \infty$, pour des sources $f \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$.

Dans le cas où $\gamma > 1$, l'effet de la coercivité dégénérée est assez bizarre. Le problème (4.1.2) n'a pas de solutions pour des sources constantes "assez grandes" (voir [2]). Par contre, si on écrit la source sous la forme λf et on suppose $f \in L^m(\Omega)$, avec $m > \frac{N}{2}$ et Ω de classe C^1 , alors dans [2], il a été montré qu'il existe un $\lambda^* > 0$ tel que, si $|\lambda| < \lambda^*$, le problème (4.1.2) admet une solution bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

Des résultats d'unicité de solutions d'entropie ou renormalisées ont été montré dans [130] et [21] sous des hypothèses supplémentaires sur la fonction a . Par simplicité nous rappelons le résultat de [130], qui porte sur l'unicité de solutions pour des données dans $L^m(\Omega)$ avec $m \geq \frac{N(2-\theta)}{2+N(1-\theta)}$. Sous cette hypothèse sur f , si a satisfait

$$|a(x, s) - a(x, t)| \leq L \left[\frac{1}{(1+|s|)^\theta} + \frac{1}{(1+|t|)^\theta} \right] |s - t|$$

alors il existe une seule solution d'entropie.

4.4 Effets régularisants de termes d'ordre inférieur polynômiaux

Les effets régularisants d'un terme d'ordre inférieur polynomial ont été observés dans [53] et [39] pour le laplacien :

$$(4.4.1) \quad \begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La solution u appartient à l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ sous la faible hypothèse que $f \in L^1(\Omega)$; par ailleurs $\nabla u \in L^q(\Omega)$, $q < \frac{2p}{p+1}$. Ces résultats sur le problème (4.4.1) ont motivé l'analyse effectuée dans [72] pour un opérateur elliptique à coercivité dégénérée, i.e., pour le problème

$$(4.4.2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + |u|^{p-1}u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans la suite nous supposons que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 3$.

Nous avons montré l'existence de solutions au sens des distributions, mais aussi de solutions d'entropie, comme résumé dans le théorème suivant.

Théorème 4.4.1. [Croce] Soit $f \in L^1(\Omega)$. Soit $s_0 = \frac{2p}{\gamma+1+p}$.

1. Si $p > \gamma + 1$, alors il existe une solution u au sens des distributions du problème (4.4.2) telle que

$$u \in W_0^{1,s}(\Omega) \cap L^p(\Omega), \quad s < s_0.$$

2. Si $0 < p \leq \gamma + 1$, alors il existe une solution d'entropie u du problème (4.4.2) telle que

$$|u|^p \in L^1(\Omega) \text{ et } |\nabla u| \in M^{s_0}(\Omega).$$

Soit $f \in L^m(\Omega)$, avec $m > 1$.

1. Si $p \geq \frac{\gamma+1}{m-1}$, alors il existe une solution u au sens des distributions du problème (4.4.2) telle que

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{pm}(\Omega).$$

2. Si $\frac{\gamma+1}{2m-1} < p < \frac{\gamma+1}{m-1}$, alors il existe une solution u au sens des distributions du problème (4.4.2) telle que

$$|u|^{pm} \in L^1(\Omega) \text{ et } u \in W_0^{1,ms_0}(\Omega).$$

3. Si $0 < p \leq \frac{\gamma+1}{2m-1}$, alors il existe une solution d'entropie u du problème (4.4.2) telle que

$$|u|^{pm} \in L^1(\Omega) \text{ et } |\nabla u| \in M^{ms_0}(\Omega).$$

Ce théorème généralise les résultats obtenus dans [27] dans le cas $p = 1$.

On remarque que la présence du terme d'ordre inférieur $|u|^{p-1}u$ donne l'existence d'une solution au sens des distributions pour une source f dans $L^1(\Omega)$. Pour telles sources, le problème (4.1.2) peut ne pas avoir une solution au sens des distributions. Aussi dans le cas $m > 1$, le terme d'ordre inférieur a un effet régularisant. En effet, si $p > \frac{\gamma}{m-1}$, nous avons une solution au sens des distributions pour tout $m > 1$. Ceci n'est pas toujours vrai pour le problème (4.1.2). Si p est "grand", i.e. $p > \frac{\gamma+1}{m-1}$ on trouve même une solution dans $H_0^1(\Omega)$ pour tout $m > 1$.

Nos résultats ont une généralisation naturelle dans les espaces $W_0^{1,r}(\Omega)$, $r \neq 2$ (voir [65] de Chen pour données dans des espaces de Lebesgue ou [17] de Benkirane et Youssfi pour données sous forme de divergence). Par ailleurs, dans [120] Mercaldo et Peral ont étudié le même problème, sauf que le terme d'ordre inférieur est au second membre (voir aussi [121] de Mercaldo, Peral et Primo pour un terme d'ordre inférieur qui est un potentiel de Hardy).

Nous allons expliquer les points clé de la preuve, car certaines techniques ont été utilisées aussi pour d'autres problèmes (voir [73] par exemple). Nous avons utilisé les problèmes approchés suivants :

$$(4.4.3) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, T_n(v))\nabla v) + |v|^{p-1}v = T_n(f) & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La présence du terme d'ordre inférieur, nous donne une estimation a priori, valable pour tout $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$:

$$\int_{\Omega} |u_n|^{pm} \leq \int_{\Omega} |f|^m;$$

Or, dans le cas où $f \in L^1(\Omega)$ et $p > \gamma + 1$, en utilisant $\varphi = [(1 + |u_n|)^{1-\lambda} - 1] \operatorname{sgn}(u_n)$, avec $\lambda > 1$, comme fonction test dans les problèmes (4.4.3) on obtient

$$(4.4.4) \quad C \int_{\Omega} \frac{|\nabla u_n|^2}{(1 + |u_n|)^{\gamma+\lambda}} \leq \int_{\Omega} |f|.$$

L'astuce de multiplier et diviser $|\nabla u_n|^q$ par $(1 + |u_n|)^{\frac{q}{2}(\gamma+\lambda)}$ (voir [35]) et (4.4.4) donnent une borne de u_n dans un certain espace de Sobolev. En fait, on arrive à

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^q \leq C \left(\int_{\Omega} (1 + |u_n|)^{\frac{q}{2-q}(\gamma+\lambda)} \right)^{1-\frac{q}{2}}$$

pour $q < 2$. Le membre de droite est uniformément borné si $\frac{q}{2-q}(\gamma + \lambda) = p$ (grâce à la première estimation a priori), c'est-à-dire $q = \frac{2p}{\gamma+p+\lambda}$. Puisque $\lambda > 1$, alors $q > 1$. Par conséquent u_n est uniformément borné dans $W_0^{1,\beta}(\Omega)$, pour $\beta < \frac{2p}{\gamma+p+1}$. La limite faible donnera une solution du problème (4.4.2).

Dans [72] nous avons aussi étudié le problème

$$(4.4.5) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + h(u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On suppose que h soit une fonction continue, croissante, nulle en 0, ayant une asymptote verticale au point $\sigma > 0$. Nous avons montré l'existence d'une solution u telle que $h(u) \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} a(x, u)\nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_{\Omega} h(u)\varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Les effets régularisants du terme $h(u)$ avaient été déjà observés dans [23] et [24] par Boccardo dans le cadre d'opérateurs elliptiques non linéaires.

Théorème 4.4.2. [Croce] Soit f une fonction $L^1(\Omega)$ positive. Alors il existe une solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ du problème (4.4.5). De plus $0 \leq u(x) \leq \sigma$ p.p. en Ω .

Ce résultat montre que la présence du terme $h(u)$ a un fort effet régularisant, car on obtient des solutions $H_0^1(\Omega)$ bornées pour toute source (positive) $L^1(\Omega)$!

Dans [32] et [33], en collaboration avec Boccardo et Orsina, nous avons amélioré le cas où $p = 1$ et $\gamma > 0$, en montrant le résultat suivant :

Théorème 4.4.3. [Boccardo-Croce-Orsina] Soit $p = 1$. Alors

1. si $m = \frac{\gamma+2}{2}$, il existe des solutions au sens des distributions dans $W_0^{1,1}(\Omega)$;
2. soit $\gamma > 1$, et soit μ une mesure de Radon positive, concentrée sur un ensemble E de capacité harmonique nulle. Alors il n'y a pas de solutions au problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{a(x, \nabla u)}{(1+u)^\gamma}\right) + u = \mu & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Plus précisément, si f_n est une suite de fonctions positives dans $L^\infty(\Omega)$ qui converge à μ au sens étroit des mesures, et si u_n est une suite de solutions des problèmes approchés, alors u_n converge à 0 p.p. en Ω et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n \varphi = \int_{\Omega} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega).$$

Le cas où f est une mesure a été étudié ensuite dans [132] beaucoup plus en détail.

Pour $0 < \gamma \leq 1$ des résultats d'existence peuvent être montrés avec la même technique que [35]. Plus précisément, si f appartient à $L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{N(1-\gamma)+1+\gamma}$ alors (4.4.2) admet une solution dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, avec q donné par (4.3.4). À remarquer que quand m tend vers $\frac{N}{N(1-\gamma)+1+\gamma}$, alors q tend vers 1. Nous avons alors deux cas : si $\frac{\gamma+2}{2} > \frac{N}{N(1-\gamma)+1+\gamma}$, c'est-à-dire, si $0 < \gamma < \frac{2}{N-1}$, notre résultat est plus faible que celui en [35]. D'autre part, si $\frac{2}{N-1} \leq \gamma \leq 1$, alors notre résultat, qui utilise le terme d'ordre inférieur, est meilleur.

Nous esquissons la preuve de l'existence, pour son originalité, dans le cas linéaire, et dans le cas où $\gamma = 2$ (voir [33]), par simplicité. Cette technique a été utilisée ensuite, dans [38], [44], [34] par exemple. Nous allons travailler sur les problèmes approchés suivants, pour lesquels il existe une solution u_n in $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$:

$$(4.4.6) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{a(x) \nabla u_n}{(1+b(x)|u_n|)^2}\right) + u_n = f_n & \text{en } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

1. Le choix d'une opportune fonction test nous permet d'obtenir les estimations suivantes :

$$(4.4.7) \quad \alpha \int_{\{|u_n| \geq k\}} \frac{|\nabla u_n|^2}{(1+b(x)|u_n|)^2} + \int_{\{|u_n| \geq k\}} |u_n|^2 \leq \int_{\{|u_n| \geq k\}} |f| |u_n|,$$

$$(4.4.8) \quad \int_{\{|u_n| \geq k\}} |u_n|^2 \leq \int_{\{|u_n| \geq k\}} |f|^2.$$

2. Nous démontrons ensuite qu'à moins d'une sous-suite, u_n converge en $L^2(\Omega)$ à une certaine fonction u , en utilisant les estimations ci-dessus sur la suite $v_n = \log(1 + B|u_n|)\operatorname{sgn}(u_n)$.

3. À moins d'une sous-suite, u_n converge faiblement à u dans $W_0^{1,1}(\Omega)$. En fait, soit E un sous-ensemble mesurable de Ω , et soit i dans l'ensemble $\{1, \dots, N\}$. Alors, en utilisant l'astuce de multiplier et diviser par $(1 + B|u_n|)$ on arrive à

$$\int_E |\partial_i u_n| \leq \left[\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} |f|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[2|E| + 2B^2 \int_E |u_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque u_n est compact dans $L^2(\Omega)$, la suite $\partial_i u_n$ est equi-intégrable. On peut alors appliquer le théorème de Dunford-Pettis. À la limite nous obtenons une fonction u appartenant à $W_0^{1,1}(\Omega)$.

4. Puisque $s \mapsto \log(1 + Bs)$ est lipschitzienne sur \mathbb{R}^+ , et u appartient à $W_0^{1,1}(\Omega)$, nous avons que

$$\nabla[\log(1 + B|u|) \operatorname{sgn}(u)] = \frac{\nabla u}{1 + B|u|}, \quad \text{p.p. en } \Omega.$$

On déduit, par la convergence faible de v_n to v in $H_0^1(\Omega)$ que

$$(4.4.9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\nabla u_n}{1 + B|u_n|} = \frac{\nabla u}{1 + B|u|}, \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N.$$

Ceci permet de passer à la limite dans les problèmes approchés.

Nous avons aussi montré l'unicité de la solution, dans le sens suivant. Soit $f \in L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)$, et soit f_n une suite de fonctions dans $L^\infty(\Omega)$ qui converge à f en $L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)$, avec $|f_n| \leq |f|$, et soit u_n une solution de (4.4.6). Nous venons de voir qu'il existe une solution au sens des distributions $u \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)$ to (4.4.2), telle que à moins d'une sous-suite,

$$(4.4.10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)} = 0.$$

Soit $g \in L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)$, et soit g_n une suite de fonctions dans $L^\infty(\Omega)$ qui converge à g dans $L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)$, avec $|g_n| \leq |g|$, et soit z_n dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution au sens des distributions de

$$(4.4.11) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{a(x, \nabla z_n)}{(1 + |z_n|)^\gamma} \right) + z_n = g_n & \text{en } \Omega \\ z_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, à moins d'une sous-suite

$$(4.4.12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|z_n - z\|_{W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)} = 0,$$

où $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^{\frac{\gamma+2}{2}}(\Omega)$ est une solution au sens des distributions de

$$(4.4.13) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{a(x, \nabla z)}{(1 + |z|)^\gamma} \right) + z = f & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notre résultat, qui implique l'unicité de la solution par approximation, est le suivant.

Théorème 4.4.4. [Boccardo-Croce-Orsina] Soient u_n et z_n des solutions de (4.4.6) et (4.4.11) respectivement. Supposons (4.4.10) et (4.4.12), avec u et z solutions de (4.4.2) et (4.4.13) respectivement. Alors

$$(4.4.14) \quad \int_{\Omega} |u - z| \leq \int_{\Omega} |f - g|.$$

4.5 Effets régularisants de termes d'ordre inférieur singuliers

L'effet de termes d'ordre inférieur quadratiques dans le gradient a été analysé dans les papiers [46], [103], [136] et [24] pour le problème (4.1.2) défini à travers un opérateur coercitif. Dans le dernier article on prouve l'existence d'une solution $H_0^1(\Omega)$ sous la seule hypothèse que la source f soit $L^1(\Omega)$. En fait, on suppose qu'il existe $d \in L^1(\Omega)$, deux constantes positives $\mu_1, \mu_2 > 0$ et une fonction continue croissante h telle que $g(x, s, \xi)s \geq 0$, $\mu_1|\xi|^2 \leq |g(x, s, \xi)|$ pour $|s| \geq \mu_2$ et $|g(x, s, \xi)| \leq d(x)h(|s|)|\xi|^2$. Alors pour une source $L^1(\Omega)$ il existe une solution au sens des distributions dans $H_0^1(\Omega)$ du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u)\nabla u) + g(x, u, \nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cela montre que les solutions de ce problème sont plus régulières de celle du problème (4.1.2) et que celles d'un problème elliptique coercitif. Nous remarquons aussi que le terme d'ordre inférieur donne l'existence d'une solution pour tout $\gamma \geq 1$. Dans [88] Della Pietra et Peral ont étudié des problèmes qui contiennent plusieurs termes qui dépendent de la norme du gradient.

Par ailleurs, en littérature on trouve plusieurs papiers sur des problèmes elliptiques coercitifs avec un terme d'ordre inférieur quadratique dans le gradient et singulier en u , c'est-à-dire pour le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + g(u)|\nabla u|^2 = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où g est de la forme $g(u) = \frac{1}{|u|^\theta}$. On suppose que $M : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N^2}$ soit une matrice de Carathéodory à coefficients bornés, pour laquelle il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$. Le cas où $0 < \theta \leq 1$, introduit dans [4], [6] et [8], a été étudié ensuite dans [26], [45] et [97]. De ces papiers on déduit que pour une donnée positive $f \in L^m(\Omega)$, si $m > \frac{N}{2}$, il existe une solution u strictement positive dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$; si $\frac{2N}{2N - \theta(N - 2)} \leq m < \frac{N}{2}$ il existe une solution u strictement positive dans $H_0^1(\Omega) \cap L^{(2-\theta)m^{**}}(\Omega)$; si $1 < m < \frac{2N}{2N - \theta(N - 2)}$ alors u appartient à $W_0^{1, \frac{Nm(2-\theta)}{N-m\theta}}(\Omega)$. Les auteurs de [7] considèrent le cas $\theta < 2$, en supposant que f soit strictement positive dans tout ensemble qui est compactement contenu dans Ω . Ils montrent que si $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ alors il existe une solution positive dans $H_0^1(\Omega)$. Dans [97] le terme d'ordre inférieur est $\lambda u + \mu \frac{|\nabla u|^2}{|u|^\theta} \chi_{\{u>0\}}$, où $\chi_{\{u>0\}}$ dénote la fonction caractéristique de l'ensemble $\{u > 0\}$, $\lambda > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Dans [73] nous avons analysé les effets régularisants du terme $\frac{|\nabla u|^2}{|u|^\theta}$ pour un opérateur à coercivité dégénérée :

$$(4.5.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{b(x)}{(1+|u|)^\gamma}\nabla u\right) + B\frac{|\nabla u|^2}{|u|^\theta} = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $B, \gamma > 0$ et $\theta > 0$. On suppose que $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ soit une fonction mesurable telle que pour des constantes positives α et β

$$(4.5.2) \quad \alpha \leq b(x) \leq \beta \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

De plus f est une fonction positive dans un espace de Lebesgue $L^m(\Omega)$, avec $m \geq 1$.

Pour énoncer nos résultats nous allons distinguer les cas $0 < \theta < 1$ et $1 \leq \theta < 2$ (car dans ce dernier cas, nous avons besoin d'une hypothèse plus forte sur la source f).

Théorème 4.5.1. [Croce] Soit $0 < \theta < 1$. Supposons que f soit une fonction positive dans $L^m(\Omega)$, avec $m \geq \frac{2N}{2N - \theta(N - 2)}$. Alors il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, strictement positive sur Ω , telle que $\frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \in L^1(\Omega)$ et

$$(4.5.3) \quad \int_{\Omega} \frac{b(x)}{(1+u)^\gamma} \nabla u \cdot \nabla \varphi + B \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \varphi = \int_{\Omega} f \varphi,$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Si de plus $f \in L^m(\Omega)$, $m > \frac{N}{2}$, alors u est bornée.

Pour des sources moins régulières, nous allons trouver des solutions dans $W_0^{1,\sigma}(\Omega)$, où $\sigma = \frac{mN(2-\theta)}{N-\theta m} < 2$.

Théorème 4.5.2. [Croce] Soit $0 < \theta < 1$. Supposons que f soit une fonction positive dans $L^m(\Omega)$, avec $\frac{N}{2N - \theta(N - 1)} < m < \frac{2N}{2N - \theta(N - 2)}$. Alors il existe une fonction $u \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$, strictement positive sur Ω , telle que $\frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \in L^1(\Omega)$ et

$$(4.5.4) \quad \int_{\Omega} \frac{b(x)}{(1+u)^\gamma} \nabla u \cdot \nabla \varphi + B \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \varphi = \int_{\Omega} f \varphi,$$

pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Nous allons maintenant analyser le cas $1 \leq \theta < 2$.

Théorème 4.5.3. [Croce] Soient $1 \leq \theta < 2$ et $\gamma > \theta - 1$. Supposons que $f \in L^m(\Omega)$, satisfasse

$$\inf \text{ess} \{f(x) : x \in \omega\} > 0$$

pour tout $\omega \subset \subset \Omega$. Soit $m \geq \frac{2N}{2N - \theta(N - 2)}$. Alors il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, strictement positive sur Ω , telle que $\frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \frac{b(x)}{(1+u)^\gamma} \nabla u \cdot \nabla \varphi + B \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Si de plus $f \in L^m(\Omega)$, $m > \frac{N}{2}$, alors u est bornée.

Théorème 4.5.4. [Croce] Soient $1 \leq \theta < 2$ and $\gamma > \theta - 1$. Supposons que $f \in L^m(\Omega)$, satisfasse

$$\inf \text{ess} \{f(x) : x \in \omega\} > 0$$

pour tout $\omega \subset \subset \Omega$. Soit $\frac{N}{2N - \theta(N - 1)} < m < \frac{2N}{2N - \theta(N - 2)}$. Alors il existe une fonction $u \in W_0^{1,\sigma}(\Omega)$, strictement positive sur Ω , telle que $\frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} \frac{b(x)}{(1+u)^\gamma} \nabla u \cdot \nabla \varphi + B \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Nous aimerions mettre en évidence les effets régularisants du terme d'ordre inférieur, dans le cas $\gamma > \theta - 1$ et $0 < \theta < 2$. Notre résultat donne des solutions $H_0^1(\Omega)$ pour des sources moins régulières que le problème (4.1.2), puisque $\frac{2N}{2N - \theta N + 2\theta} < \frac{2N}{N(1 - \gamma) + 2(\gamma + 1)}$. Même dans le cas où la donnée f est moins régulière, nous avons une meilleure régularité de solutions que les solutions du problème (4.1.2) : en fait $\sigma = \frac{mN(2 - \theta)}{N - \theta m} \geq \frac{Nm(1 - \gamma)}{N - m(1 + \gamma)}$, puisque $m \leq \frac{N}{2}$ et $\gamma \leq \theta - 1$.

Dans le cas où $0 < \gamma \leq \theta - 1$, nous avons montré l'existence d'une solution du problème (4.5.1) avec la même régularité que le problème (4.1.2).

Théorème 4.5.5. [Croce] Soient $1 \leq \theta < 2$ et $0 < \gamma \leq \theta - 1$. Supposons que $f \in L^m(\Omega)$ satisfasse

$$\inf \text{ess} \{f(x) : x \in \omega\} > 0$$

pour tout $\omega \subset \subset \Omega$.

1. Si $m > \frac{N}{2}$, alors il existe une solution strictement positive dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ du problème (4.5.1).
2. Si $\frac{2N}{N+2-\gamma(N-2)} \leq m < \frac{N}{2}$, alors il existe une solution strictement positive dans $H_0^1(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ du problème (4.5.1), où r est défini par (4.3.3).
3. Si $\frac{N}{N+1-\gamma(N-1)} < m < \frac{2N}{N+2-\gamma(N-2)}$, alors il existe une solution strictement positive $W_0^{1,s}(\Omega)$ du problème (4.5.1), où s est défini par (4.3.4).

De plus $\frac{|\nabla u|^2}{u^\theta} \in L^1(\Omega)$.

Dans le cas où $\theta \geq 2$, la situation change. En effet nous avons prouvé un résultat de non-existence de solutions $H^1(\Omega)$. Soit $\lambda_1(f)$ la première valeur propre

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^q(\Omega)$, avec $q > \frac{N}{2}$. À l'aide d'un résultat de [7], il est facile de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.5.6. [Croce] Soit $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$, une fonction $L^q(\Omega)$, avec $q > \frac{N}{2}$. Si $\theta > 2$, ou $\theta = 2$ et $\lambda_1(f) > \frac{\beta}{B\alpha}$, alors il n'y a aucune solution $H_0^1(\Omega)$ du problème (4.5.1).

Nous allons maintenant expliquer les points plus importants des preuves. Premièrement, avec le choix d'opportunes fonctions test, on arrive à des estimations a priori des solutions des problèmes approchés suivants :

$$(4.5.5) \quad \begin{cases} -\text{div} \left(\frac{b(x)}{(1+T_n(u_n))^\gamma} \nabla u_n \right) + B \frac{u_n |\nabla u_n|^2}{(u_n + \frac{1}{n})^{\theta+1}} = T_n(f) & \text{en } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(bien posés grâce aux résultats montrés dans [19], [40], [41]). Par compacité dans les espaces de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, $W_0^{1,\sigma}(\Omega)$, $W_0^{1,s}(\Omega)$, on a l'existence d'une fonction u limite. En utilisant la même technique que dans [26] et [2], on peut montrer qu'à moins d'une sous-suite ∇u_n converge à ∇u p.p. en Ω . Le point le plus difficile des démonstrations est montrer que la fonction u est strictement positive en Ω .

1. Dans le cas $0 < \theta < 1$, nous avons utilisé une technique similaire à celle de [26]. On pose, pour $s \geq 0$,

$$H_n(s) = \int_0^s \frac{t(1+T_n(t))^\gamma}{\alpha(t+\frac{1}{n})^{\theta+1}} dt, \quad H(s) = \int_0^s \frac{(1+t)^\gamma}{\alpha t^\theta} dt,$$

et

$$P_n(s) = \int_0^s \frac{e^{-BH_n(t)}}{(1+T_n(t))^\gamma} dt, \quad P(s) = \int_0^s \frac{e^{-BH(t)}}{(1+t)^\gamma} dt.$$

En choisissant comme fonction test $e^{-BH_n(u_n)}\phi$, où ϕ est une fonction positive $C_0^\infty(\Omega)$, nous avons

$$-\text{div}(b(x)\nabla(P_n(u_n))) \geq T_1(f)e^{-BH_n(u_n)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(u_n) \in H_0^1(\Omega)$. Soit z_n la solution $H_0^1(\Omega)$ de

$$-\text{div}(b(x)\nabla z_n) = T_1(f)e^{-BH_n(u_n)};$$

soit z la solution $H_0^1(\Omega)$ de

$$-\text{div}(b(x)\nabla z) = T_1(f)e^{-BH(u)}.$$

Alors

$$-\operatorname{div}(b(x)\nabla(P_n(u_n))) \geq -\operatorname{div}(b(x)\nabla z_n).$$

Le principe de comparaison permet de conclure.

2. Dans le cas où $1 \leq \theta < 2$, nous allons montrer que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ il existe une constante positive c_ω telle que les solutions u_n des problèmes (4.5.5) vérifient $u_n \geq c_\omega$ en ω pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme dans [7]). Pour cela nous allons utiliser le théorème suivant, montré dans [116] par Leoni et Pellacci.

Théorème 4.5.7. *Soit $B : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ il existe $m_\omega > 0$ tel que $B(x, s) \geq m_\omega l(s)$ pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $s \geq 0$. Soit $l : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante telle que $l(s)/s$ est croissante pour s suffisamment grand et pour un $t_0 > 0$*

$$(4.5.6) \quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\int_0^t l(s)ds}} < +\infty.$$

Alors pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que toute sous-solution $v \in H_{loc}^1(\Omega)$ de $-\operatorname{div}(b(x)\nabla v) + B(x, v) = 0$ telle que $v^+ \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ et $B(x, v^+) \in L_{loc}^1(\Omega)$ vérifie $v \leq C_\omega$ in ω .

La condition (4.5.6) est appelée condition de Keller-Osserman, d'après les papiers [111] et [127] de Keller et Osserman sur les équations semi-linéaires.

Nous allons faire un changement de variables sur les solutions des problèmes approchés, de manière à obtenir un problème elliptique semi-linéaire comme dans le Théorème 4.5.7. On pose $a_n(s) = \frac{1}{(1 + T_n(s))^\gamma}$. Alors

$$-\operatorname{div}(b(x)\nabla u_n)a_n(u_n) - a'_n(u_n)b(x)|\nabla u_n|^2 + \frac{B}{u_n^\theta}|\nabla u_n|^2 \geq T_1(f).$$

Soit $k_n(t) = \int_1^t \frac{B}{\alpha r^\theta a_n(r)} dr$ et $\psi_n(s) = \int_s^1 e^{-k_n(t)} a_n^{\frac{\beta}{\alpha}}(t) dt$. Alors, il n'est pas difficile de voir que $v_n = \psi_n(u_n)$ vérifie

$$0 \geq -\operatorname{div}(b(x)\nabla v_n) + T_1(f)e^{-k_n(\psi_n^{-1}(v_n))}a_n^{\frac{\beta}{\alpha}-1}(\psi_n^{-1}(v_n)).$$

Pour $s \geq 0$ nous avons

$$(4.5.7) \quad a_n^{\frac{\beta}{\alpha}-1}(\psi_n^{-1}(s)) \geq a_n^{\frac{\beta}{\alpha}-1}(1) = a_0.$$

De plus $\psi_n^{-1}(s) \leq \psi_1^{-1}(s)$ pour tout $s \geq 0$. Puisque $\psi_n^{-1}(s) \leq 1$ et $a_n(s) = a_1(s) \geq 0$ pour $s \geq 1$, on en déduit que

$$(4.5.8) \quad e^{-k_n(\psi_n^{-1}(s))} \geq e^{-k_1(\psi_1^{-1}(s))}.$$

Par les estimations (4.5.7) et (4.5.8), v_n vérifie

$$0 \geq -\operatorname{div}(b(x)\nabla v_n) + B(x, v_n), \quad B(x, s) = \begin{cases} T_1(f)a_0 l(s), & s \geq 0 \\ 0, & s \leq 0, \end{cases}$$

où $l(s) = e^{-k_1(\psi_1^{-1}(s))} - 1$, $s \geq 0$. On montre que l vérifie les hypothèses du Théorème 4.5.7, pour pouvoir conclure.

Dans [74], nous avons étudié le problème

$$(4.5.9) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{a(x)\nabla u}{(1 + |u|)^\gamma} \right) = \frac{f}{|u|^p} & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où p et γ sont réels positifs, f est une fonction dans $L^m(\Omega)$ positive. Nous avons montré l'existence d'une solution u au sens des distributions telle que

$$(4.5.10) \quad \forall \omega \subset\subset \Omega, \exists c_\omega > 0 \text{ tel que } u \geq c_\omega > 0 \text{ en } \omega \text{ et } \int_{\Omega} a(x) \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{(1+u)^\gamma} = \int_{\Omega} \frac{f}{u^p} \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Même si le membre de droite est singulier en u , il a des effets régularisants, comme le montre notre résultat.

Théorème 4.5.8. [Croke] Soit $p \geq \gamma - 1$.

1. Soit $p < \gamma + 1$.

(a) Si $f \in L^m(\Omega)$, avec $m \geq \frac{2^*}{2^* - \gamma - 1 + p}$, il existe une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (4.5.9) au sens (4.5.10). Si $\frac{2^*}{2^* - \gamma - 1 + p} \leq m < \frac{N}{2}$, u appartient à $L^{m^{**}(p+1-\gamma)}(\Omega)$.

(b) Si $f \in L^m(\Omega)$, avec $\max \left\{ 1, \frac{1^*}{2 \cdot 1^* - \gamma - 1 + p} \right\} < m < \frac{2^*}{2^* - \gamma - 1 + p}$, il existe une solution $u \in W_0^{1,\rho}(\Omega)$, $\rho = \frac{Nm(p+1-\gamma)}{N - m(\gamma+1-p)}$, du problème (4.5.9) au sens (4.5.10).

2. Soient $p = \gamma + 1$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il existe une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (4.5.9) au sens (4.5.10).

3. Soient $p > \gamma + 1$ et $f \in L^1(\Omega)$. Il existe une solution $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ du problème (4.5.9) au sens (4.5.10), telle que $u^{\frac{p+1-\gamma}{2}} \in H_0^1(\Omega)$.

4. Soit $f \in L^m(\Omega)$, avec $m > \frac{N}{2}$. La solution trouvée ci-dessus est bornée.

On remarque qu'on a une solution pour tout $\gamma > 0$, si $p \geq \gamma - 1$. Ceci n'est pas le cas pour le problème (4.1.2). Sous les mêmes conditions sur f , la régularité des solutions du problème (4.5.9) est meilleure ou égale à celle des solutions du problème (4.1.2), puisque $\rho > q$ et $m^{**}(p+1-\gamma) > m^{**}(1-\gamma)$. Par ailleurs on obtient des solutions dans $H_0^1(\Omega)$ pour des sources moins régulières. En fait, si $\gamma - 1 \leq p < \gamma + 1$, on a $\frac{2^*}{2^* - \gamma - 1 + p} < \frac{2N}{N(1-\gamma) + 2(\gamma+1)}$; si $p = \gamma + 1$ on obtient une solution $H_0^1(\Omega)$ pour toute source dans $L^1(\Omega)$.

Comme dans le problème précédent, la difficulté est de montrer que la solution est strictement positive. Pour cela, nous avons travaillé sur les problèmes approchés suivants :

$$(4.5.11) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{a(x) \nabla u_n}{(1 + |T_n(u_n)|)^p} \right) = \frac{T_n(f)}{(|u_n| + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{en } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où on a "tronqué" la coercitivité dégénérée du terme principal et la singularité du second membre. Ces problèmes admettent une solution positive $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Nous avons montré par ailleurs que $u_n \leq u_{n+1}$ p.p. en Ω et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ il existe $c_\omega > 0$ tel que $u_n \geq c_\omega$ p.p. en ω pour tout $n \in \mathbb{N}$. Des estimations a priori nous ont permis d'obtenir une fonction u , limite des u_n , qui est une solution au sens (4.5.10).

Liste des publications

Publications dans des revues à comité de lecture

1. G. Croce et B. Dacorogna, On a generalized Wirtinger inequality, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 9, 2003, 1329-1341.
2. G. Croce, A differential inclusion : the case of an isotropic set, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11, 2005, 122-138.
3. T. Champion et G. Croce, A particular class of solutions of a system of eikonal equations, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 16, 2006, 377-392.
4. G. Croce, The regularizing effects of some lower order terms in an elliptic equation with degenerate coercivity, *Rend. Mat. Appl.*, 27, 2007, 299-314.
5. G. Croce, C. Lacour et G. Michaille, A characterization of gradient Young-concentration measures generated by solutions of Dirichlet-type problems with large sources, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 15, 2009, 818-838.
6. A.C. Barroso, G. Croce et A. Ribeiro, On the existence of solutions to a nonlinear system involving isotropic deformations, *Journal Nonlin. Systems Appl.*, 1, 2010, 113-121.
7. G. Croce et G. Pisante, A selection criterion of solutions to a system of eikonal equations, *Adv. Calc. Var.*, 4, 2011, 309-338.
8. G. Croce, On an elliptic problem with degenerate coercivity and a singular quadratic gradient lower order term, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, S, 5, 2011, 507 - 530.
9. L. Boccardo, G. Croce et L. Orsina, $W_0^{1,1}(\Omega)$ minima of a non coercive functional, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl.*, 22, 2011, 513-523.
10. L. Boccardo, G. Croce et L. Orsina, Nonlinear degenerate elliptic problems with $W_0^{1,1}(\Omega)$ solutions, *Manuscripta Math.*, 137, 2012, 419-439.
11. G. Croce, A. Henrot et G. Pisante, An isoperimetric inequality for a nonlinear eigenvalue problem, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 29, 2012, 21-34.
12. L. Boccardo, G. Croce, L. Orsina, A semilinear problem with a $W_0^{1,1}(\Omega)$ solution, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl.*, 23, 2012, 97-103.
13. G. Croce, An elliptic problem with two singularities, *Asymptot. Anal.*, 78, 2012, 1-10.
14. A.C. Barroso, G. Croce et A. Ribeiro, Sufficient Conditions for Existence of Solutions to Vectorial Differential Inclusions and Applications, *Houston J. Math.*, 39, 2013, 929-967.
15. G. Croce, A. Henrot et G. Pisante, Corrigendum to "An isoperimetric inequality for a nonlinear eigenvalue problem", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 32, 2015, 485-487.
16. L. Boccardo, G. Croce et C. Tanteri, An elliptic system with degenerate coercivity, *Rend. Mat. Appl.*, 36, 2015, 1-9.

Ouvrages

1. L. Boccardo et G. Croce, Esistenza e regolarità di soluzioni per alcuni problemi ellittici, *Quaderni dell'Unione Matematica Italiana*, 2010, 112 pages, Pitagora Editrice, Bologna.
2. L. Boccardo et G. Croce, *Elliptic partial differential equations; existence and regularity of distributional solutions*, 2013, 210 pages, De Gruyter.
3. G. Croce et D. Soudière, "Précis de mathématiques pour l'IUT (BTS & DUT industriels), Méthode d'apprentissage progressive avec exemples, exercices à compléter et exercices à corriger", 2014, 528 pages, Editions Ellipses.

Actes de conférences (avec comité de lecture)

1. A.C. Barroso, G. Croce et A. Ribeiro, *On an isotropic differential inclusion*, Actes de la conférence International Conference on Complex Systems and Applications, 2009, Le Havre.
2. G. Croce, On an elliptic problem with degenerate coercivity and a system of eikonal equations, Actes de la conférence EDP Normandie, 2010, Caen.
3. G. Croce, A survey of two recent results, Actes de la conférence EDP Normandie, 2011, Rouen.
4. L. Boccardo, G. Croce et L. Orsina, *Existence of solutions for some noncoercive elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms*, Differential Equations and Applications, 4, 2012, 3-9.
5. L. Boccardo et G. Croce, $W_0^{1,1}(\Omega)$ in some borderline cases of elliptic equations with degenerate coercivity, Analysis and Topology in Nonlinear Differential Equations, 2014, 135-144.

Articles soumis

1. C. Bianchini, G. Croce et A. Henrot, *On the quantitative isoperimetric inequality in the plane*.
2. F. Brock, G. Croce, O. Guibé et A. Mercaldo, *Symmetry and asymmetry of minimizers of a class of noncoercive functionals*.

Articles en préparation

G. Croce et G. Pisante, *Selection of solutions to an isotropic system*.

Thèse de doctorat

G. Croce, *Sur quelques inclusions différentielles de premier et de deuxième ordre*, thèse 3010 (2004) de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne.

Bibliographie

- [1] J.-J. Alibert, B. Dacorogna, *An example of a quasiconvex function that is not polyconvex in two dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal. 117 (1992), 155-166.
- [2] A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina, G. Trombetti, *Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity*, Ann. Mat. Pura Appl. 182 (2003), 53-79.
- [3] A. Alvino, V. Ferone, C. Nitsch, *A sharp isoperimetric inequality in the plane*, J. Eur. Math. Soc. 13 (2011), 185-206.
- [4] D. Arcoya, S. Barile, P.J. Martínez-Aparicio, *Singular quasilinear equations with quadratic growth in the gradient without sing condition*, J. Math. Anal. Appl. 350 (2009), 401-408.
- [5] D. Arcoya, L. Boccardo, L. Orsina, *Existence of critical points for some noncoercive functionals*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 18 (2001), 437-457.
- [6] D. Arcoya, J. Carmona, P.J. Martínez-Aparicio, *Elliptic obstacle problems with natural growth on the gradient and singular nonlinear terms*, Adv. Nonlinear Stud. 7 (2007), 299-317.
- [7] D. Arcoya, J. Carmona, T. Leonori, P.J. Martínez-Aparicio, L. Orsina, F. Petitta, *Existence and non-existence of solutions for singular quadratic quasilinear equations*, J. Differential Equations 246 (2009), 4006-4042.
- [8] D. Arcoya, P.J. Martínez-Aparicio, *Quasilinear equations with natural growth*, Rev. Mat. Iberoam. 24 (2008), 597-616.
- [9] J.M. Ball, R.D. James, *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, Arch. Rational Mech. Anal. 100 (1987), 15-52.
- [10] J.M. Ball, R.D. James, *Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two wells problem*, Phil. Trans. Royal Soc. London A 338 (1991), 389-450.
- [11] L. Barbosa, P. Bérard, *Eigenvalue and "twisted" eigenvalue problems, applications to cmc surfaces*, J. Math. Pures Appl. 79 (2000), 427-450.
- [12] A.C. Barroso, G. Croce, A.M. Ribeiro, *Existence for a nonlinear problem involving isotropic deformations*, Journal of Nonlinear Systems and Applications 1 (2010), 113-121.
- [13] A.C. Barroso, G. Croce, A.M. Ribeiro, *Sufficient Conditions for Existence of Solutions to Vectorial Differential Inclusions and Applications*, Houston J. Math. 39 (2013), 929-967.
- [14] M. Belloni, B. Kawohl, *A symmetry problem related to Wirtinger's and Poincaré's inequality*, J. Differential Equations 156 (1999), 211-218.
- [15] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vazquez, *An L^1 theory of existence and uniqueness of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 22 (1995), 240-273.
- [16] A. Benkirane, A. Youssfi, *Regularity for solutions of nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity*, Ric. Mat. 56 (2007), 241-275.
- [17] A. Benkirane, A. Youssfi, *Regularizing effects of some lower order terms in non-uniformly nonlinear elliptic equations*, Ric. Mat. 58 (2009), 185-205.
- [18] A. Benkirane, A. Youssfi, D. Meskine, *Bounded solutions for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity and data in an $LlogL$* , Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 15 (2008), 369-375.
- [19] A. Bensoussan, L. Boccardo, F. Murat, *On a nonlinear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solutions*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 5 (1988), 347-364.

- [20] C. Bianchini, G. Croce, A. Henrot, *On the quantitative isoperimetric inequality in the plane*, soumis.
- [21] D. Blanchard, F. Désir, O. Guibé, *Quasi-linear degenerate elliptic problems with L^1 data*, Nonlinear Anal. 60 (2005), 557-587.
- [22] D. Blanchard, O. Guibé, *Infinite valued solutions of non-uniformly elliptic problems*, Anal. Appl. (Singap.) 2 (2004), 227-246.
- [23] L. Boccardo, *On the regularizing effect of strongly increasing lower order terms*, J. Evol. Equ. 3 (2003), 225-236.
- [24] L. Boccardo, *Quasilinear elliptic equations with natural growth terms : the regularizing effects of lower order terms*, J. Nonlin. Conv. Anal. 7 (2006), 355-365.
- [25] L. Boccardo, *Some elliptic problems with degenerate coercivity*, Adv. Nonlinear Stud. 6 (2006), 1-12.
- [26] L. Boccardo, *Dirichlet problems with singular and gradient quadratic lower order terms*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 14 (2008), 411-426.
- [27] L. Boccardo, H. Brezis, *Some remarks on a class of elliptic equations*, Boll. Unione Mat. Ital. 6 (2003), 521-530.
- [28] L. Boccardo, G. Croce, *Esistenza e regolarità di soluzioni per alcuni problemi ellittici*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 51, Pitagora Editrice, Bologna, 2010.
- [29] L. Boccardo, G. Croce, *Elliptic partial differential equations. Existence and regularity of distributional solutions*, De Gruyter Studies in Mathematics, 55, De Gruyter, Berlin, 2014.
- [30] L. Boccardo, G. Croce, *$W_0^{1,1}$ solutions in some borderline cases of elliptic equations with degenerate coercivity*, Analysis and Topology in nonlinear differential equations, Birkhäuser, 2014, 135-144.
- [31] L. Boccardo, G. Croce, L. Orsina, *$W_0^{1,1}$ minima of noncoercive functionals*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl. 22 (2011), 513-523.
- [32] L. Boccardo, G. Croce, L. Orsina, *Nonlinear degenerate elliptic problems with $W_0^{1,1}(\Omega)$ solutions*, Manuscripta Math. 137 (2012), 419-439.
- [33] L. Boccardo, G. Croce, L. Orsina, *A semilinear problem with a $W_0^{1,1}(\Omega)$ solution*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei Mat. Appl. 23 (2012), 97-103.
- [34] L. Boccardo, G. Croce, C. Tanteri, *An elliptic system with degenerate coercivity*, Rendiconti di Matematica 36 (2015), 1-9.
- [35] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, L. Orsina, *Existence and regularity results for some elliptic equations with degenerate coercivity*, dedicated to Prof. C. Vinti (Perugia, 1996), Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 46 (1998), 51-81.
- [36] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. 87 (1989), 149-169.
- [37] L. Boccardo, T. Gallouët, *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1 data*, Nonlinear Anal. 19 (1992), 573-579.
- [38] L. Boccardo, T. Gallouët, *$W_0^{1,1}$ solutions in some borderline cases of Calderon-Zygmund theory*, J. Differential Equations 253 (2012), 2698-2714.
- [39] L. Boccardo, T. Gallouët, J. L. Vázquez, *Nonlinear elliptic equations in \mathbb{R}^N without growth restrictions on the data*, J. Differential Equations 105 (1993), 334-363.
- [40] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *Existence de solutions non bornées pour certaines équations quasi-linéaires*, Port. Math. 41 (1982), 507-534.
- [41] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *L^∞ estimate for some nonlinear elliptic partial differential equations and application to an existence result*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 326-333.
- [42] L. Boccardo, L. Orsina, *Existence and regularity of minima for integral functionals noncoercive in the energy space*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze 25 (1997), 95-130.
- [43] L. Boccardo, L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations 37 (2010), 363-380.

- [44] L. Boccardo, L. Orsina, *Leray-Lions operators with logarithmic growth*, J. Math. Anal. Appl. 423 (2015), 608-622.
- [45] L. Boccardo, L. Orsina, M.M. Porzio, *Existence results for quasilinear elliptic and parabolic problems with quadratic gradient terms and sources*, Advances in Calculus of Variations 4 (2011), 397-419.
- [46] L. Boccardo, S. Segura de León, C. Trombetti, *Bounded and unbounded solutions for a class of quasi-linear elliptic problems with a quadratic gradient term*, J. Math. Pures Appl. 80 (2001), 919-940.
- [47] T. Bonnesen, *Über die isoperimetrische Defizit ebener Figuren*, Math. Ann. 91 (1924), 252-268.
- [48] B. Brandolini, F. Della Pietra, C. Nitsch, C. Trombetti, *Symmetry breaking in constrained Cheeger type isoperimetric inequality*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 21 (2015), 359-371.
- [49] L. Brasco, G. Franzina, *On the Hong-Kahn-Szego inequality for the p -Laplace operator*, Manuscripta Math. 141 (2013), 537-557.
- [50] A. Bressan, E. Flores, *On total differential inclusions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 92 (1994), 9-16.
- [51] H. Brezis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 18 (1968), 115-175.
- [52] H. Brezis, F.H. Browder, *Strongly nonlinear elliptic boundary problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci 4 (1978), 587-603.
- [53] H. Brezis, W. Strauss, *Semi-linear second-order elliptic equations in L^1* , J. Math. Soc. Japan 25 (1973), 565-590.
- [54] F. Brock, G. Croce, O. Guibé, A. Mercaldo, *Symmetry and asymmetry of minimizers of a class of noncoercive functionals*, soumis.
- [55] F. Brock, A.Y. Solynin, *An approach to symmetrization via polarization*, Trans. Am. Math. Soc. 352 (2000), 1759-1796.
- [56] A.P. Buslaev, V.A. Kondratév, A.I. Nazarov, *On a family of extremal problems and related properties of an integral*, Mat. Zametki 51 (1998), 830-838.
- [57] S. Campi, *Isoperimetric deficit and convex plane sets of maximum translative discrepancy*, Geom. Dedicata 43 (1992), 71-81.
- [58] P. Cardaliaguet, B. Dacorogna, W. Gangbo, N. Georgy, *Geometric restrictions for the existence of viscosity solutions*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 16 (1999), 189-220.
- [59] P. Cardaliaguet, R. Tahraoui, *Equivalence between rank one convexity and polyconvexity for isotropic sets of $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ (Part I)*, Nonlinear Anal. 50 (2002), 1179-1199.
- [60] P. Cardaliaguet, R. Tahraoui, *Equivalence between rank one convexity and polyconvexity for isotropic sets of $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ (Part II)*, Nonlinear Anal. 50 (2002), 1201-1239.
- [61] A. Cellina, *On minima of a functional of the gradient : necessary conditions*, Nonlinear Analysis 20 (1993), 337-341.
- [62] A. Cellina, *On minima of a functional of the gradient : sufficient conditions*, Nonlinear Analysis 20 (1993), 343-347.
- [63] A. Cellina, S. Perrotta, *On a problem of potential wells*, J. Convex Analysis 2 (1995), 103-115.
- [64] T. Champion, G. Croce, *A particular class of solutions to a system of eikonal equations*, Adv. Math. Sci. Appl. 16 (2006), 377-392.
- [65] G. Chen, *Nonlinear elliptic equation with lower order term and degenerate coercivity*, Math. Notes 93 (2013), 224-237.
- [66] M. Cicalese, G. P. Leonardi, *A selection principle for the sharp quantitative isoperimetric inequality*, Arch. Ration. Mech. Anal. 206 (2012), 617-643.
- [67] M. Cicalese, G. P. Leonardi, *Best constants for the isoperimetric inequality in quantitative form*, J. Eur. Math. Soc. 15 (2013), 1101-1129.
- [68] G.R. Cirmi, *On the existence of solutions to non-linear degenerate elliptic equations with measures data*, Ricerche Mat. 42 (1993), 315-329.

- [69] S. Conti, C. De Lellis, S. Müller, M. Romeo, *Polyconvexity equals rank-one convexity for connected isotropic sets in $M^{2 \times 2}$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 337 (2003), 233-238.
- [70] M. G. Crandall, P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 1-42.
- [71] G. Croce, *A differential inclusion : the case of an isotropic set*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 11 (2005), 122-138.
- [72] G. Croce, *The regularizing effects of some lower order terms in an elliptic equation with degenerate coercivity*, Rend. Mat. Appl. 27 (2007), 299-314.
- [73] G. Croce, *On an elliptic problem with degenerate coercivity and a singular quadratic gradient lower order term*, Discrete Contin. Dyn. Syst, S, 5 (2011), 507-530.
- [74] G. Croce, *An elliptic problem with two singularities*, Asymptot. Anal., 78 (2012), 1-10.
- [75] G. Croce, B. Dacorogna, *On a generalized Wirtinger inequality* Discrete Contin. Dyn. Syst 9 (2003), 1329-1341.
- [76] G. Croce, A. Henrot, G. Pisante, *An isoperimetric inequality for a nonlinear eigenvalue problem*, Annales de l'IHP (C) Non Linear Analysis 29 (2012), 21-34.
- [77] G. Croce, A. Henrot, G. Pisante, *Corrigendum to "An isoperimetric inequality for a nonlinear eigenvalue problem"*, Annales de l'IHP (C) Non Linear Analysis 32 (2014), 485-487.
- [78] G. Croce, G. Pisante, *A selection criterion of solutions to a system of eikonal equations*, Adv. Calc. Var. 4 (2011), 309-338.
- [79] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations* Second edition, Applied Mathematical Sciences, 78, Springer, New York, 2008.
- [80] B. Dacorogna, W. Gangbo, N. Subía, *Sur une généralisation de l'inégalité de Wirtinger*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 9 (1992), 29-50.
- [81] B. Dacorogna, R. Glowinski, T.-W. Pan, *Numerical methods for the solution of a system of eikonal equations with Dirichlet boundary conditions*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 336 (2003), 511-518.
- [82] B. Dacorogna, P. Marcellini, *Implicit partial differential equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 37, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [83] B. Dacorogna, P. Marcellini, *Viscosity solutions, almost everywhere solutions and explicit formulas*, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), 4643-4653 (electronic).
- [84] B. Dacorogna, P. Marcellini, E. Paolini, *An explicit solution to a system of implicit differential equations*, Annales de l'IHP (C) Non Linear Analysis 25 (2008), 163-171.
- [85] B. Dacorogna, G. Pisante, *A general existence theorem for differential inclusions in the vector valued case*, Port. Math. (N.S.) 62 (2005), 421-436.
- [86] B. Dacorogna, A.M. Ribeiro, *On some definitions and properties of generalized convex sets arising in the calculus of variations*, Recent Advances on Elliptic and Parabolic Issues, Proceedings of the 2004 Swiss-Japanese Seminar (2006), 103-128.
- [87] F.S. De Blasi, G. Pianigiani, *A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banach spaces*, Funkcialaj Ekvacioj 25 (1982), 153-162.
- [88] F. Della Pietra, I. Peral, *Breaking of resonance for elliptic problems with strong degeneration at infinity*, Commun. Pure Appl. Anal. 10 (2011), 593-612.
- [89] G. di Blasio, F. Feo, *A class of nonlinear degenerate elliptic equations related to the Gauss measure*, J. Math. Anal. Appl. 386 (2012), 763-779.
- [90] F. Faraci, *A bifurcation theorem for noncoercive integral functionals*, Comment. Math. Univ. Carolin. 45 (2004) 443-456.
- [91] A. Figalli, F. Maggi, A. Pratelli, *A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities*, Invent. Math. 182 (2010), 167-211.
- [92] P. Freitas, A. Henrot, *On the first twisted Dirichlet eigenvalue* Commun. Anal. Geom., 12 (2004), 1083-1103.

- [93] G. Friesecke, *A necessary and sufficient condition for nonattainment and formation of microstructure almost everywhere in scalar variational problems*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 124 A (1994), 437-471.
- [94] B. Fuglede, *Stability in the isoperimetric problem for convex or nearly spherical domains in \mathbb{R}^n* , Trans. Amer. Math. Soc. 314 (1989), 619-638.
- [95] N. Fusco, *The quantitative isoperimetric inequality and related topics*, preprint.
- [96] N. Fusco, F. Maggi, A. Pratelli, *The sharp quantitative isoperimetric inequality*, Ann. of Math. 168 (2008), 941-980.
- [97] D. Giachetti, F. Murat, *An elliptic problem with a lower order term having singular behaviour*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B 3 (2009), 349-370.
- [98] D. Giachetti, M. M. Porzio, *Existence results for some nonuniformly elliptic equations with irregular data*, J. Math. Anal. Appl. 257 (2001), 100-130.
- [99] D. Giachetti, M. M. Porzio, *Elliptic equations with degenerate coercivity : gradient regularity*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 19 (2003), 349-370.
- [100] P. Girao, T. Weth, *The shape of extremal functions for Poincaré-Sobolev-type inequalities in a ball*, Journal of Functional Analysis 237 (2006), 194-223.
- [101] A. Greco, M. Lucia, *Laplacian eigenvalues for mean zero functions with constant Dirichlet data*, Forum Mathematicum 20 (2008), 763-782.
- [102] P.-A. Gremaud, N. R. Ide, *Computation of nonclassical solutions to Hamilton-Jacobi problems*, SIAM J. Sci. Comput. 21 (1999), 502-521.
- [103] N. Grenon, C. Trombetti, *Existence results for a class of nonlinear elliptic problems with p -growth in the gradient*, Nonlinear Anal. 52 (2003), 931-942.
- [104] M. Gromov, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 9, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [105] R. R. Hall, *A quantitative isoperimetric inequality in n -dimensional space*, J. Reine Angew. Math 428 (1992), 161-176.
- [106] A. Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [107] A. Henrot, M. Pierre, *Variation et optimisation de formes, Une analyse géométrique*, Mathématiques & Applications (Berlin), 48, Springer, Berlin, 2005.
- [108] A. Hurwitz, *Sur le problème des isopérimètres*, C. R. Acad. Sci. Paris 132 (1901), 401-403.
- [109] B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics, 1150, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [110] B. Kawohl, *Symmetry results for functions yielding best constants in Sobolev-type inequalities*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 6 (2000), 683-690.
- [111] J.B. Keller, *On the solutions of $\Delta u = f(u)$* , Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), 503-510.
- [112] S. Kesavan, *Symmetrization & applications*. Series in Analysis, 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2006.
- [113] B. Kirchheim, *Deformations with finitely many gradients and stability of quasiconvex hulls*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 332 (2001), 289-294.
- [114] J. Kolář, *Non-compact lamination convex hulls*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 20 (2003), 391-403.
- [115] E. Krahn, *Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen*, Acta Comm. Univ. Dorpat. A9 (1926), 1-44.
- [116] F. Leoni, B. Pellacci, *Local estimates and global existence for strongly nonlinear parabolic equations with locally integrable data*, J. Evol. Equ. 6 (2006), 113-144.
- [117] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 97-107.
- [118] P.-L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Research Notes in Math. 69, Pitman, London, 1982.

- [119] A. Mercaldo, *Existence and boundedness of minimizers of a class of integral functionals*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. 6 (2003), 125-139.
- [120] A. Mercaldo, I. Peral, *Existence results for semilinear elliptic equations with some lack of coercivity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 138 (2008), 569-595.
- [121] A. Mercaldo, I. Peral, A. Primo, *Results for degenerate nonlinear elliptic equations involving a Hardy potential*, J. Differential Equations 251 (2011), 3114-3142.
- [122] S. Müller, V. Šverák, *Attainment results for the two-well problem by convex integration*, Geometric analysis and the calculus of variations, Internat. Press, Cambridge, MA (1996), 239-251.
- [123] S. Müller, V. Šverák, *Convex integration for Lipschitz mappings and counterexamples to regularity*, Ann. of Math., 157 (2003), 715-742.
- [124] A. I. Nazarov, *On exact constant in the generalized Poincaré inequality*, Journal of Mathematical Sciences 112 (2002), 4029-4047.
- [125] A. I. Nazarov, *On symmetry and asymmetry in a problem of shape optimization*, arXiv : 1208 : 3640, 2012.
- [126] L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 8 (1955), 649-675.
- [127] R. Osserman, *On the inequality $\Delta u \geq f(u)$* , Pacific J. Math. 7 (1957), 1641-1647.
- [128] G. Pisante, *Sufficient conditions for the existence of viscosity solutions for nonconvex Hamiltonians*, SIAM J. Math. Anal. 36 (2004), 186-203 (electronic).
- [129] G. Polya, G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. Math. Studies 27, Princeton Univ. Press (1951).
- [130] A. Porretta, *Uniqueness and homogenization for a class of noncoercive operators in divergence form*, dedicated to Prof. C. Vinti (Perugia, 1996). Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 46 (1998), 915-936.
- [131] A. Porretta, *Remarks on existence or loss of minima of infinite energy*, Asymptot. Anal. 52 (2007) 53-94.
- [132] M. M. Porzio, F. Smarrazzo, *Radon measure-valued solutions for some quasilinear degenerate elliptic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. 194 (2015), 495-532.
- [133] A.M. Ribeiro, *Inclusions différentielles et problèmes variationnels*, Ph.D. Thesis No. 3583, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2006.
- [134] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15 (1965), 189-258.
- [135] C. Trombetti, *Existence and regularity for a class of non-uniformly elliptic equations in two dimensions*, Differential Integral Equations 13 (2000), 687-706.
- [136] C. Trombetti, *Non-uniformly elliptic equations with natural growth in the gradient*, Potential Anal. 18 (2003), 391-404.
- [137] T. Weth, *Symmetry of solutions to variational problems for nonlinear elliptic equations via reflection methods*, Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 112 (2010), 119-158.
- [138] V. Wolontis, *Properties of conformal invariants*, Am. J. Math. 74 (1952), 587-606.